Физико-математические науки

Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета. 2023. Т. 15, № 4. С. 127–138
The Territory of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University. 2023. Vol. 15, № 4. P. 127–138

Научная статья
УДК 517.977.59
DOI: https://doi.org/10.24866/VVSU/2949-1258/2023-4/127-138

Оптимизация отражающей способности поверхности в модели сложного теплообмена

Гренкин Глеб Владимирович

Владивостокский государственный университет
Владивосток. Россия

Аннотация. *Рассматривается математическая модель, представляющая собой краевую задачу для уравнения теплопроводности, совмещенного с приближением уравнения переноса излучения на основе упрощенного метода сферических гармоник третьего порядка. Указанные уравнения служат для описания установившегося состояния процесса сложного теплообмена в ограниченной области пространства. Исследуется задача оптимального управления отражающей способностью поверхности с целью обеспечить желаемое распределение тепловой энергии в рассматриваемой области. Задачи из этого класса возникают при расчете теплообмена при высоких температурах, когда необходимо выбрать покрытие внутренней поверхности, которое обеспечит оптимальную теплоотдачу за счет оптимального соотношения между поглощаемым и отражаемым излучением. Для данной задачи получены условия оптимальности, доказано существование оптимальных решений, установлено свойство релейности оптимального управления.*

Ключевые слова: *радиационный теплообмен, оптимальное управление, метод сферических гармоник, диффузионное приближение.*

Для цитирования: *Гренкин Г.В. Оптимизация отражающей способности поверхности в модели сложного теплообмена // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского государственного университета. 2023. Т. 15, № 4. С. 127–138. DOI: https://doi.org/10.24866/VVSU/-2949-1258/2023-4/127-138*

Physical and mathematical sciences

Original article

Optimization of surface reflectivity in a model of complex heat transfer

Gleb V. Grenkin

Vladivostok State University
Vladivostok. Russia

Abstract. *The paper deals with a mathematical model that is a boundary-value problem for the heat conduction equation coupled with an approximation of the radiative transfer equation within the third order simplified spherical harmonics method. These equations provide a description of the steady state of the process of complex heat transfer in a bounded domain. The problem of optimal control of surface reflectivity to obtain the desired heat distribution is considered. Problems of this class may arise when calculations are needed for heat transfer at high temperatures and the coating of the inner surface is to be chosen to* *achieve optimal heat outflow by providing an optimal relationship between absorbed and reflected radiation. For the solution of this problem, optimality conditions are obtained, the existence of optimal solutions is proved, and the bang-bang property of optimal controls is established.*

Keywords: *radiative heat transfer, optimal control, spherical harmonics method, diffusion approximation.*

For citation: *Grenkin G.V. Optimization of surface reflectivity in a model of complex heat transfer // The Territory of New Opportunities. The Herald of Vladivostok State University. 2023. Vol. 15, № 4. P. 127–138. DOI: https://doi.org/10.24866/VVSU/2949-1258/2023-4/127-138*

Целью моделирования сложного теплообмена является повышение точности расчета распределения тепловой энергии в рассматриваемой области за счет включения в модель уравнений, которым подчиняется распространение теплового излучения. В свою очередь, расчет теплообмена может проводиться для подбора характеристик, обеспечивающих оптимальную теплоотдачу, и в связи с этим возникает задача автоматизировать этот подбор. Одними из факторов, влияющих на параметры теплоотдачи, могут стать параметры поверхности, влияющие на поглощение и отражение энергии излучения. Поэтому логично поставить задачу выбора оптимальных отражающих свойств поверхности, при которых распределение тепловой энергии в области либо на ее границе будет как можно ближе к желаемому.

С математической точки зрения указанная задача сводится к задаче оптимального управления коэффициентом, входящим в краевые условия для уравнений, описывающих распространение теплового излучения. Для модели, включающей диффузионное приближение уравнения переноса излучения, указанная задача решалась в работах [1, 2] для стационарных уравнений сложного теплообмена: были выведены условия оптимальности и доказано существование оптимальных решений. Аналогичная задача изучалась для нестационарных уравнений в работах [3, 4], в которых также построен численный метод для автоматического нахождения оптимальной отражающей способности поверхности. В работах [5, 6] для стационарных и нестационарных моделей сложного теплообмена предложен подход, позволяющий оптимизировать монотонные функционалы качества, и построен алгоритм, позволяющий максимизировать либо минимизировать поля тепловой и лучистой энергии сразу во всей области. Задачи оптимального управления температурой на границе области исследовались в работах [7, 8] для диффузионного приближения и в работе [9] в рамках упрощенного метода сферических гармоник третьего порядка (SP_3-приближение уравнения переноса излучения). Обратные задачи восстановления неизвестного коэффициента отражающей способности поверхности по дополнительной информации о потоке тепловой энергии через поверхность исследовались в работах [10, 11].

Таким образом, задача оптимального управления отражающей способностью поверхности, входящей как коэффициент в краевом условии для интенсивности излучения, изучена в рамках диффузионного (P_1) приближения. Однако при использовании более точного SP_3-приближения задача оптимизации заключается в нахождении не одной граничной функции, а четырех функций. Эти функции являются коэффициентами в краевых условиях для двух компонент интенсивности излучения и зависят от распределения отражающей способности поверхности. Цель настоящей работы – изучить задачу оптимизации отражающей способности поверхности в рамках SP_3-приближения.

Основная часть

Постановка задачи

Ранее была выведена модель сложного теплообмена на основе упрощенного метода сферических гармоник третьего порядка, описывающая установившийся процесс теплового излучения в ограниченной области с зеркально и диффузно отражающей поверхностью. Для указанной модели доказана однозначная разрешимость краевой задачи при условиях постоянства отражающей способности поверхности и некоторых условиях на коэффициенты в краевых условиях, которые выполняются для всего диапазона допустимых физических данных. В данной работе мы будем предполагать, что допущение о возможном различии отражающей способности поверхности на разных ее участках не приведет к нарушению корректности прямой задачи.

Процесс сложного теплообмена в ограниченной области $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ с липшицевой границей Γ описывается следующими уравнениями относительно неизвестных функций – $\theta = \theta(x)$ – нормированная температура, $\psi_1 = \psi_1(x)$ и $\psi_2 = \psi_2(x)$ – компоненты нормированной усредненной по направлениям интенсивности излучения $\varphi = \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2$:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a\left(\theta^4 - \varphi\right) = 0, \tag{1}$$

$$-\alpha_1\Delta\psi_1 + \kappa\psi_1 = \kappa_s\varphi + \kappa_a\theta^4, \tag{2}$$

$$-\alpha_2\Delta\psi_2 + \kappa\psi_2 = \kappa_s\varphi + \kappa_a\theta^4, \tag{3}$$

$$-a\frac{\partial\theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \tag{4}$$

$$-\alpha_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n} + \beta_{11}\psi_1 + \beta_{12}\psi_2 = \eta_1\theta_b^4, \tag{5}$$

$$-\alpha_2\frac{\partial\psi_1}{\partial n} + \beta_{21}\psi_1 + \beta_{22}\psi_2 = \eta_2\theta_b^4. \tag{6}$$

Здесь ω_1 и ω_2 – положительные весовые коэффициенты, удовлетворяющие соотношению $\omega_1 + \omega_2 = 1$; через $\partial/\partial n$ обозначена производная в направлении внешней нормали к поверхности Γ; коэффициенты в уравнениях a, b, κ_a, κ_s, $\kappa = \kappa_a + \kappa_s$, α_1, α_2 – положительные числа, характеризующие радиационно-термические свойства среды, которой заполнена область Ω; функция $\beta = \beta(x), x \in \Gamma$ пропорциональна коэффициенту теплоотдачи поверхности; граничные функции β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22} выражаются через отражающую способность поверхности; $\eta_1 = \beta_{11} + \beta_{12}$, $\eta_2 = \beta_{21} + \beta_{22}$ и функция $\theta_b = \theta_b(x), x \in \Gamma$ имеют смысл граничной температуры.

Будем предполагать, что:

(i) функции β, β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22} ограничены на Γ, функция θ_b неотрицательна и ограничена сверху на Γ, функции β, β_{11} и β_{22} ограничены снизу положительным числом;

(ii) матрица $\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ имеет строгое диагональное преобладание в каждой точке $x \in \Gamma$, причем функции $\beta_{11} - |\beta_{12}|$ и $\beta_{22} - |\beta_{21}|$ ограничены снизу положительным числом на Γ;

(iii) функции $\omega_1\beta_{11} - \omega_2|\beta_{21}|$ и $\omega_2\beta_{22} - \omega_1|\beta_{12}|$ ограничены снизу положительным числом на Γ.

Показано, что при постоянных коэффициентах β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22} условий (i) – (iii) достаточно для однозначной разрешимости системы (1) – (6) в смысле слабого решения, причем эти условия выполняются для физических данных.

Слабым решением задачи (1) – (6) будем называть тройку функций $\{\theta, \psi_1, \psi_2\}$, принадлежащих пространству Соболева $V = H^1(\Omega)$ и подчиняющихся операторным уравнениям:

$$A\theta + b\kappa_a\left(|\theta|^3\theta - \varphi\right) = g\ , \tag{7}$$

$$B_1\{\psi_1, \psi_2\} + \kappa\psi_1 = \kappa_s\varphi + \kappa_a|\theta|^3\theta + g_1\ , \tag{8}$$

$$B_2\{\psi_1, \psi_2\} + \kappa\psi_2 = \kappa_s\varphi + \kappa_a|\theta|^3\theta + g_2\ , \tag{9}$$

в которых операторы $A : V \to V'$, $B_{1,2} : V \times V \to V'$ и функционалы $g, g_{1,2} \in V'$ определяются согласно равенствам

$$(A\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v d\Gamma\ ,$$

$$(B_1\{\psi_1, \psi_2\}, v) = \alpha_1(\nabla\psi_1, \nabla v) + \int_\Gamma (\beta_{11}\psi_1 + \beta_{12}\psi_2) v d\Gamma\ ,$$

$$(B_2\{\psi_1, \psi_2\}, v) = \alpha_2(\nabla\psi_2, \nabla v) + \int_\Gamma (\beta_{21}\psi_1 + \beta_{22}\psi_2) v d\Gamma\ ,$$

$$(g, v) = \int_\Gamma \beta\theta_b v d\Gamma\ ,\ (g_1, v) = \int_\Gamma \eta_1\theta_b^4 v d\Gamma\ ,\ (g_2, v) = \int_\Gamma \eta_2\theta_b^4 v d\Gamma\ ,$$

справедливым для любой тестовой функции $v \in V$. Здесь и далее через (f, v) обозначено значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$, если $f, v \in L^2(\Omega)$, а через $\|v\|$ обозначается норма функции v в пространстве $L^2(\Omega)$.

Граничные коэффициенты β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22} выражаются через коэффициент зеркального отражения ρ_s, коэффициент диффузного отражения ρ_d и коэффициент поглощения $\varepsilon = 1 - \rho_s - \rho_d$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}T^{-1},\quad T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix},\quad \lambda_i = \frac{5}{7}\left(1 + (-1)^i 3\sqrt{\frac{6}{5}}\right),$$

где $\gamma_{11} = \dfrac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}$, $\gamma_{12} = \dfrac{5\varepsilon}{8(2-\varepsilon)}$, $\gamma_{21} = \dfrac{\varepsilon}{8(2-\varepsilon)}$, $\gamma_{22} = \dfrac{5\varepsilon}{8(2-\varepsilon)} + \dfrac{15\rho^d}{16(1+\rho^s)(2-\varepsilon)}$.

В дальнейшем, решая обратную задачу, будем исходить из предположения, что при выбранных нами граничных функциях β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22}, удовлетворяющих условиям (i) – (iii), будет выполнено условие

(A) при $0 \le \theta \le M$ и $0 \le \theta_b \le M$ существует единственное слабое решение $\{\psi_1, \psi_2\}$ задачи (2), (3), (5), (6), причем $0 \le \psi_{1,2} \le M^4$,
из которого должно следовать, что слабое решение задач (1) – (6) существует единственно, и его компоненты θ, ψ_1, ψ_2 подчиняются неравенствам $0 \le \theta \le M$, $0 \le \psi_1 \le M^4$, $0 \le \psi_2 \le M^4$, где M – верхняя грань множества значений функции θ_b.

Задача оптимального управления состоит в нахождении граничных функций ρ_s, ρ_d из множества допустимых управлений $U = \{(\rho_s, \rho_d) : \rho_s^{\min} \le \rho_s \le \rho_s^{\max}, \rho_d^{\min} \le \rho_d \le \rho_d^{\max}\}$, на которых некоторый функционал стоимости $J = J(\theta, \psi_1, \psi_2)$, зависящий от граничных коэффициентов через слабое решение задач (1) – (6), принимает наименьшее значение.

Будем предполагать, что:

(j) $\rho_s^{\min}, \rho_s^{\max}$, $\rho_d^{\min}, \rho_d^{\max}$ – неотрицательные граничные функции, для которых выполнено $\rho_s^{\min} \le \rho_s^{\max}$, $\rho_d^{\min} \le \rho_d^{\max}$, $\rho_s^{\max} + \rho_d^{\max} \le 1 - \varepsilon_0$, где ε_0 – малое положительное число;

(jj) $J : V \times V \times V \to \mathrm{R}$ непрерывно дифференцируем по Фреше функционал ограничен снизу и слабо полунепрерывен снизу.

Существование оптимальных решений

Теорема. При выполнении для допустимых управлений предположения (А) и выполнении условий (j), (jj) задача оптимального управления имеет решение.

Доказательство.

В силу ограниченности снизу функционала J существует точная нижняя грань множества его значений на множестве U, поэтому можно построить минимизирующую последовательность управлений $u_k \in U$, $u_k = \left(\rho_s^{(k)}, \rho_d^{(k)}\right)$, для которой $J(y(u_k)) \to \inf\limits_U J(y(u))$ при $k \to \infty$. Здесь $y(u)$ – решение прямой задачи для управления u. Выделим из ограниченной последовательности u_k слабо сходящуюся в $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ подпоследовательность, которая будет обозначаться так же. В силу того, что множество U выпукло и замкнуто, слабый предел последовательности u_k принадлежит множеству U. Обозначив этот предел через $u_* \in U$, докажем, что он является решением задачи оптимального управления.

В силу ограниченности решений прямой задачи последовательность $y_k = y(u_k)$ ограничена в $V \times V \times V$, а значит, можно еще раз выделить подпоследовательность, для которой будет выполнено $u_k \to u_*$ слабо в $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ и $y_k \to y_*$ слабо в $V \times V \times V$. Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу, то $J(y_*) \le \liminf J(y_k) = \inf\limits_U J(y(u))$ и, следовательно, $J(y_*) \le \inf\limits_U J(y(u))$. Теперь остается доказать, что $y(u_*) = y_*$. В таком случае придем к выводу о том, что $J(y(u_*)) \le \inf\limits_U J(y(u))$, а значит, $J(y(u_*)) = \inf\limits_U J(y(u))$, т.е. u_* – оптимальное решение.

Решения $y_k = \{\theta_k, \psi_{1k}, \psi_{2k}\}$ подчиняются уравнениям:

$$A\theta_k + b\kappa_a\left(|\theta_k|^3\theta_k - \varphi_k\right) = g,$$

$$B_1\{\psi_{1k}, \psi_{2k}\} + \kappa\psi_{1k} = \kappa_s\varphi_k + \kappa_a|\theta_k|^3\theta_k + g_1,$$

$$B_2\{\psi_{1k}, \psi_{2k}\} + \kappa\psi_{2k} = \kappa_s\varphi_k + \kappa_a|\theta_k|^3\theta_k + g_2,$$

где $\varphi_k = \omega_1\psi_{1k} + \omega_2\psi_{2k}$, операторы B_1, B_2 и функционалы g_1, g_2 зависят от u_k.

В силу компактности оператора вложения $H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ и компактности оператора следа $H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ получим, что $\theta_k \to \theta_*$ в $L^2(\Omega)$, $\psi_{1k} \to \psi_{1*}$ и $\psi_{2k} \to \psi_{2*}$ в $L^2(\Gamma)$, где $y_* = \{\theta_*, \psi_{1*}, \psi_{2*}\}$.

Поскольку $0 \le \theta_k \le M$, то для любой тестовой функции $v \in V$ выполняется оценка $\left|\left(|\theta_k|^3\theta_k - |\theta_*|^3\theta_*, v\right)\right| \le 4M^3\|\theta_k - \theta_*\| \cdot \|v\| \to 0$. Заметим также, что

$$\left|\int_\Gamma \left(\beta_{ijk}\psi_{jk} - \beta_{ij*}\psi_{j*}\right)v d\Gamma\right| \le \left|\int_\Gamma \beta_{ijk}\left(\psi_{jk} - \psi_{j*}\right)v d\Gamma\right| + \left|\int_\Gamma \left(\beta_{ijk} - \beta_{ij*}\right)\psi_{j*} v d\Gamma\right| \to 0,$$

где $u_k = \left\{\rho_s^{(k)}, \rho_d^{(k)}\right\}$, коэффициенты β_{ijk} липшиц-непрерывно зависят от $\rho_s^{(k)}, \rho_d^{(k)}$. Отсюда следует, что $\beta_{ijk} \to \beta_{ij*}$ слабо в $L^2(\Gamma)$.

Итак, переходя в уравнениях к пределу при $k \to \infty$, получим, что $y(u_*) = y_*$. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Система оптимальности

Общая теория оптимального управления системами, которые моделируются дифференциальными уравнениями в частных производных, описана в работах [12, 13]. Трудность теоретического анализа представляет доказательство регулярности системы оптимальности. Свойство регулярности означает, что производная Фреше оператора ограничений по y должна быть непрерывно обратимым оператором, и в этом случае множитель Лагранжа при функционале стоимости можно считать отличным от нуля, что будет означать информативность условий оптимальности.

Определим отображение $F: V \times V \times V \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \to V' \times V' \times V'$, которое тройке θ, ψ_1, ψ_2 и паре ρ_s, ρ_d ставит в соответствие тройку функционалов $\left\{A\theta + b\kappa_a\left(|\theta|^3\theta - \varphi\right) - g,\right.$ $B_1\{\psi_1, \psi_2\} + \kappa\psi_1 - \kappa_s\varphi - \kappa_a|\theta|^3\theta - g_1,$ $\left.B_2\{\psi_1, \psi_2\} + \kappa\psi_2 - \kappa_s\varphi - \kappa_a|\theta|^3\theta - g_2\right\}$. Тогда система уравнений (7) – (9) может быть записана как $F(y,u) = 0$, где $y = \{\theta, \psi_1, \psi_2\}$, $u = \{\rho_s, \rho_d\}$, и задачу оптимального управления можно сформулировать в виде

$$J(y,u) \to \min, \quad F(y,u) = 0, \quad u \in U. \tag{10}$$

Отображение F непрерывно дифференцируемо по y в пространстве $V \times V \times V$, и компоненты его производной можно найти по формуле

$$F_y'(y,u)\{z, v, w\} = \left\{Az + b\kappa_a\left(4|\theta|^3 z - (\omega_1 v + \omega_2 w)\right),\right.$$
$$\left.B_1\{v, w\} + \kappa v - \kappa_s(\omega_1 v + \omega_2 w) - 4\kappa_a|\theta|^3 z,\ B_2\{v, w\} + \kappa w - \kappa_s(\omega_1 v + \omega_2 w) - 4\kappa_a|\theta|^3 z\right\}.$$

Регулярность условий оптимальности обеспечивается следующей леммой.

Лемма. Предположим, что выполнены условия (i) – (iii) и предположение (A), и пусть $\{\hat{y},\hat{u}\}$ – решение задачи (10). Тогда для любых функционалов $f_1, f_2, f_3 \in V'$ задача

$$F'_y(\hat{y},\hat{u})\{z,v,w\} = \{f_1, f_2, f_3\} \tag{11}$$

имеет решение $\{z,v,w\} \in V \times V \times V$.

Доказательство. Используя теорему Рисса, можно сопоставить оператору F'_y, действующему из $V\times V\times V$ в $V'\times V'\times V'$, оператор, действующий из пространства $V\times V\times V$ в себя, который является суммой изоморфизма и компактного оператора (ср. [2]). Тогда, в силу альтернативы Фредгольма [14, с. 538], разрешимость уравнения (11) с любой правой частью равносильна единственности решения уравнения

$$F'_y(\hat{y},\hat{u})\{z,v,w\} = 0 ,$$

которое сводится к системе уравнений:

$$Az + b\kappa_a\left(4\left|\hat{\theta}\right|^3 z - (\omega_1 v + \omega_2 w)\right) = 0 , \tag{12}$$

$$B_1\{v,w\} + \kappa v - \kappa_s(\omega_1 v + \omega_2 w) - 4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3 z = 0 , \tag{13}$$

$$B_2\{v,w\} + \kappa w - \kappa_s(\omega_1 v + \omega_2 w) - 4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3 z = 0 . \tag{14}$$

Чтобы доказать, что система (12) – (14) имеет единственное решение, умножим скалярно уравнение (12) на функцию $r_\varepsilon(z)$, уравнение (13) на $b\omega_1 r_\varepsilon(v)$, уравнение (14) на $b\omega_2 r_\varepsilon(w)$ и сложим полученные равенства. Здесь $r_\varepsilon(s)$ – это аппроксимация функции $\operatorname{sign} s$:

$$r_\varepsilon(s) = \begin{cases} s/|s|, \text{ если } |s| > \varepsilon, \\ s/\varepsilon, \text{ если } |s| \le \varepsilon. \end{cases}$$

Заметим, что $(Az, r_\varepsilon(z)) = a(r'_\varepsilon(z)\nabla z, \nabla z) + \int_\Gamma \beta z r_\varepsilon(z)d\Gamma \ge \int_\Gamma \beta z r_\varepsilon(z)d\Gamma$ и аналогично $(B_1\{v,w\}, r_\varepsilon(v)) \ge \int_\Gamma(\beta_{11}v + \beta_{12}w)r_\varepsilon(v)d\Gamma$, $(B_2\{v,w\}, r_\varepsilon(w)) \ge \int_\Gamma(\beta_{21}v + \beta_{22}w)r_\varepsilon(w)d\Gamma$.

Итак, придем к неравенству

$$\int_\Gamma \beta z r_\varepsilon(z)d\Gamma + b\omega_1\int_\Gamma(\beta_{11}v + \beta_{12}w)r_\varepsilon(v)d\Gamma + b\omega_2\int_\Gamma(\beta_{21}v + \beta_{22}w)r_\varepsilon(w)d\Gamma +$$
$$+ b\kappa_a\left(4\left|\hat{\theta}\right|^3 z - (\omega_1 v + \omega_2 w), r_\varepsilon(z)\right) + b\omega_1\left(\kappa v - \kappa_s(\omega_1 v + \omega_2 w) - 4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3 z, r_\varepsilon(v)\right) +$$
$$+ b\omega_2\left(\kappa w - \kappa_s(\omega_1 v + \omega_2 w) - 4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3 z, r_\varepsilon(w)\right) \le 0 ,$$

из которого после предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ вытекает неравенство

$$\int_\Gamma \beta|z|d\Gamma + b\omega_1\int_\Gamma(\beta_{11}v + \beta_{12}w)\operatorname{sign} v d\Gamma + b\omega_2\int_\Gamma(\beta_{21}v + \beta_{22}w)\operatorname{sign} w d\Gamma +$$

$$+b\kappa_a\left(4\left|\hat\theta\right|^3 z-(\omega_1 v+\omega_2 w),\operatorname{sign} z\right)+b\omega_1\left(\kappa v-\kappa_s(\omega_1 v+\omega_2 w)-4\kappa_a\left|\hat\theta\right|^3 z,\operatorname{sign} v\right)+$$

$$+b\omega_2\left(\kappa w-\kappa_s(\omega_1 v+\omega_2 w)-4\kappa_a\left|\hat\theta\right|^3 z,\operatorname{sign} w\right)\le 0\ .$$

Заметим, что

$$\left(4\left|\hat\theta\right|^3 z-(\omega_1 v+\omega_2 w)\right)\operatorname{sign} z+\omega_1\left(v-4\left|\hat\theta\right|^3 z\right)\operatorname{sign} v+\omega_2\left(w-4\left|\hat\theta\right|^3 z\right)\operatorname{sign} w=$$

$$=\omega_1\left(4\left|\hat\theta\right|^3 z-v\right)(\operatorname{sign} z-\operatorname{sign} v)+\omega_2\left(4\left|\hat\theta\right|^3 z-w\right)(\operatorname{sign} z-\operatorname{sign} w)\ge 0\ ,$$

$$(\omega_1 v+\omega_2 w)(\omega_1\operatorname{sign} v+\omega_2\operatorname{sign} w)\le\omega_1|v|+\omega_2|w|\ ,$$

$$\omega_1\int_\Gamma(\beta_{11}v+\beta_{12}w)\operatorname{sign} v\,d\Gamma+\omega_2\int_\Gamma(\beta_{21}v+\beta_{22}w)\operatorname{sign} w\,d\Gamma=$$

$$=\int_\Gamma\left(\omega_1\beta_{11}|v|+\omega_2\beta_{21}v\operatorname{sign} w+\omega_2\beta_{22}|w|+\omega_1\beta_{12}w\operatorname{sign} v\right)d\Gamma\ge$$

$$\ge\int_\Gamma\left((\omega_1\beta_{11}-\omega_2|\beta_{21}|)|v|+(\omega_2\beta_{22}-\omega_1|\beta_{12}|)|w|\right)d\Gamma\ge\delta_0\int_\Gamma(|v|+|w|)d\Gamma\ ,$$

где δ_0 – положительная константа.

Следовательно, $\int_\Gamma\beta|z|d\Gamma+b\delta_0\int_\Gamma(|v|+|w|)d\Gamma=0$. Отсюда $z=v=w=0$ на Γ.

Умножая уравнение (13) на $b\omega_1$, уравнение (14) на $b\omega_2$ и складывая их с уравнением (12), придем к тождеству

$$a(\nabla z,\nabla q)+b\alpha_1\omega_1(\nabla v,\nabla q)+b\alpha_2\omega_2(\nabla w,\nabla q)=0\ ,$$

которое выполняется для любой тестовой функции $q\in V$. Отсюда следует, что $az+b\alpha_1\omega_1 v+b\alpha_2\omega_2 w=0$ в Ω.

Подставляя выражение для $z=-\dfrac{b}{a}(\alpha_1\omega_1 v+\alpha_2\omega_2 w)$ в уравнения (13) и (14), получим

$$B_1\{v,w\}+\left(\kappa-\kappa_s\omega_1+4\kappa_a\left|\hat\theta\right|^3\frac{b}{a}\alpha_1\omega_1\right)v+\left(-\kappa_s\omega_2+4\kappa_a\left|\hat\theta\right|^3\frac{b}{a}\alpha_2\omega_2\right)w=0\ ,$$

$$B_2\{v,w\}+\left(\kappa-\kappa_s\omega_2+4\kappa_a\left|\hat\theta\right|^3\frac{b}{a}\alpha_2\omega_2\right)w+\left(-\kappa_s\omega_1+4\kappa_a\left|\hat\theta\right|^3\frac{b}{a}\alpha_1\omega_1\right)v=0\ .$$

Умножая первое равенство на аппроксимацию функции $\operatorname{sign} v$, второе – на аппроксимацию функции $\operatorname{sign} w$ и складывая полученные соотношения, придем к неравенству

$$\int_\Omega\left(\kappa(|v|+|w|)+\left(-\kappa_s\omega_1+4\kappa_a\left|\hat\theta\right|^3\frac{b}{a}\alpha_1\omega_1\right)v+\right.$$

$$\left.+\left(-\kappa_s\omega_2+4\kappa_a\left|\hat\theta\right|^3\frac{b}{a}\alpha_2\omega_2\right)w\right)(\operatorname{sign} v+\operatorname{sign} w)dx\le 0\ .$$

Заметим, что при $\operatorname{sign} v=\operatorname{sign} w$ подынтегральное выражение можно оценить следующим образом:

$$\kappa\left(|v|+|w|\right)+\left(-\kappa_s\omega_1+4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3\frac{b}{a}\alpha_1\omega_1\right)v+\left(-\kappa_s\omega_2+4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3\frac{b}{a}\alpha_2\omega_2\right)w=$$

$$=\left(\kappa-\kappa_s\omega_1+4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3\frac{b}{a}\alpha_1\omega_1\right)|v|+\left(\kappa-\kappa_s\omega_2+4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3\frac{b}{a}\alpha_2\omega_2\right)|w|\geq$$

$$\geq(\kappa_a+\omega_2\kappa_s)|v|+(\kappa_a+\omega_1\kappa_s)|w|,$$

а при $\operatorname{sign} v\neq\operatorname{sign} w$ подынтегральное выражение равно $\kappa\left(|v|+|w|\right)$, следовательно,

$$\int_\Omega\left((\kappa_a+\omega_2\kappa_s)|v|+(\kappa_a+\omega_1\kappa_s)|w|\right)dx\leq 0 .$$

Отсюда $v=w=0$, значит, $z=0$.

Следующая теорема формулирует необходимые условия оптимальности решения.

Теорема. Пусть выполнены условия (i) – (iii), (j), (jj) и предположение (A) и пусть $\{\hat{y},\hat{u}\}$ – решение задачи (10). Тогда существует тройка q, p_1, p_2, которая является решением системы

$$Aq+4\kappa_a\left|\hat{\theta}\right|^3(bq-p_1-p_2)=-J'_\theta(\hat{y}), \tag{15}$$

$$B'_1\{p_1,p_2\}+\kappa p_1=\kappa_s\omega_1(p_1+p_2)+b\kappa_a\omega_1 q-J'_{\psi_1}(\hat{y}), \tag{16}$$

$$B'_2\{p_1,p_2\}+\kappa p_2=\kappa_s\omega_2(p_1+p_2)+b\kappa_a\omega_2 q-J'_{\psi_2}(\hat{y}), \tag{17}$$

где операторы $B'_{1,2}:V\times V\to V'$ определяются согласно равенствам

$$\left(B'_1\{p_1,p_2\},v\right)=\alpha_1(\nabla p_1,\nabla v)+\int_\Gamma(\beta_{11}p_1+\beta_{21}p_2)v\,d\Gamma ,$$

$$\left(B'_2\{p_1,p_2\},v\right)=\alpha_2(\nabla p_2,\nabla v)+\int_\Gamma(\beta_{12}p_1+\beta_{22}p_2)v\,d\Gamma ,$$

при этом справедливо неравенство

$$\int_\Gamma\chi_s(\rho_s-\hat{\rho}_s)d\Gamma+\int_\Gamma\chi_d(\rho_d-\hat{\rho}_d)d\Gamma\geq 0 \text{ для любых } \{\rho_s,\rho_d\}\in U ,$$

где

$$\chi_s=\left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_1\frac{\partial\beta_{11}}{\partial\rho_s}+\left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_1\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_s}+\left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_2\frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_s}+\left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_2\frac{\partial\beta_{22}}{\partial\rho_s},$$

$$\chi_d=\left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_1\frac{\partial\beta_{11}}{\partial\rho_d}+\left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_1\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_d}+\left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_2\frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_d}+\left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_2\frac{\partial\beta_{22}}{\partial\rho_d}.$$

Доказательство. Составим функцию Лагранжа L, которая тройке $y=\{\theta,\psi_1,\psi_2\}$, паре $u=\{\rho_s,\rho_d\}$ и тройке $p=\{q,p_1,p_2\}$ ставит в соответствие число

$$L(y,u,p)=J(y)+(F(y,u),p)=J(y)+\left(A\theta+b\kappa_a\left(|\theta|^3\theta-\varphi\right)-g,q\right)+$$

$$+\left(B_1\{\psi_1,\psi_2\}+\kappa\psi_1-\kappa_s\varphi-\kappa_a|\theta|^3\theta-g_1,p_1\right)+\left(B_2\{\psi_1,\psi_2\}+\kappa\psi_2-\kappa_s\varphi-\kappa_a|\theta|^3\theta-g_2,p_2\right).$$

Из леммы вытекает, что $\operatorname{Im}F'_y(\hat{y},\hat{u})=V'\times V'\times V'$. Тогда, в соответствии с принципом Лагранжа [12, с. 81], существует сопряженное состояние $p=\{q,p_1,p_2\}$, такое, что

$$\left\langle L'_y(\hat{y},\hat{u},p),h\right\rangle=0 \text{ для любого } h\in V\times V\times V \text{ и}$$

$\left\langle L'_u(\hat{y},\hat{u},p),u-\hat{u}\right\rangle \geq 0$ для любого $u\in U$.

Тождество $\left\langle L'_y(\hat{y},\hat{u},p),h\right\rangle = 0$ сводится к сопряженной системе (15) – (17).

Поскольку для любого $h=\{h_s,h_d\}\in L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$ выполняются равенства

$$\left\langle L'_{\rho_s}(\hat{y},\hat{u},p),h_s\right\rangle = \int_\Gamma \frac{\partial\beta_{11}}{\partial\rho_s}\left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_1h_s d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_s}\left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_1h_s d\Gamma +$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_s}\left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_2h_s d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial\beta_{22}}{\partial\rho_s}\left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_2h_s d\Gamma,$$

$$\left\langle L'_{\rho_d}(\hat{y},\hat{u},p),h_d\right\rangle = \int_\Gamma \frac{\partial\beta_{11}}{\partial\rho_d}\left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_1h_d d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_d}\left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_1h_d d\Gamma +$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_d}\left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_2h_d d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial\beta_{22}}{\partial\rho_d}\left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_2h_d d\Gamma,$$

то

$$\left\langle L'_u(\hat{y},\hat{u},p),u-\hat{u}\right\rangle = \left\langle L'_{\rho_s}(\hat{y},\hat{u},p),\rho_s-\hat{\rho}_s\right\rangle + \left\langle L'_{\rho_d}(\hat{y},\hat{u},p),\rho_d-\hat{\rho}_d\right\rangle =$$

$$=\int_\Gamma \left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_1\left(\frac{\partial\beta_{11}}{\partial\rho_s}\left(\rho_s-\hat{\rho}_s\right)+\frac{\partial\beta_{11}}{\partial\rho_d}\left(\rho_d-\hat{\rho}_d\right)\right)d\Gamma +$$

$$+\int_\Gamma \left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_1\left(\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_s}\left(\rho_s-\hat{\rho}_s\right)+\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\rho_d}\left(\rho_d-\hat{\rho}_d\right)\right)d\Gamma +$$

$$+\int_\Gamma \left(\psi_1-\theta_b^4\right)p_2\left(\frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_s}\left(\rho_s-\hat{\rho}_s\right)+\frac{\partial\beta_{21}}{\partial\rho_d}\left(\rho_d-\hat{\rho}_d\right)\right)d\Gamma +$$

$$+\int_\Gamma \left(\psi_2-\theta_b^4\right)p_2\left(\frac{\partial\beta_{22}}{\partial\rho_s}\left(\rho_s-\hat{\rho}_s\right)+\frac{\partial\beta_{22}}{\partial\rho_d}\left(\rho_d-\hat{\rho}_d\right)\right)d\Gamma \geq 0 \text{ для любых}$$

$\{\rho_s,\rho_d\}\in U$.

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие. Оптимальное управление удовлетворяет свойству релейности (bang-bang):

$$\hat{\rho}_s = \begin{cases}\rho_s^{\min}, \text{ если } \chi_s > 0,\\ \rho_s^{\max}, \text{ если } \chi_s < 0,\end{cases} \quad \hat{\rho}_d = \begin{cases}\rho_d^{\min}, \text{ если } \chi_d > 0,\\ \rho_d^{\max}, \text{ если } \chi_d < 0.\end{cases}$$

Заключение

Таким образом, мы вывели необходимые условия оптимальности, из которых вытекает релейность оптимального управления. По сравнению с аналогичной задачей для диффузионного приближения, в которой участвует граничный коэффициент поглощения, рассмотренная модель позволяет найти оптимальные величины двух характеристик поверхностей: коэффициентов зеркального и диффузного отражения. Здесь коэффициент поглощения может принимать не два, как в случае диффузионного приближения, а четыре разных значения, соответствующих знакам двух функций переключения.

Список источников

1. Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer / A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann // J. Math. Anal. Appl. 2014. Vol. 412, № 1. P. 520–528.
2. Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model / A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, G.V. Grenkin [et al.] // Appl. Math. Comput. 2016. Vol. 289. P. 371–380.
3. Boundary optimal control problem of complex heat transfer model / G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk [et al.] // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433, № 2. P. 1243–1260.
4. Гренкин Г.В. Алгоритм решения задачи граничного оптимального управления в модели сложного теплообмена // Дальневосточный математический журнал. 2016. Т. 16, № 1. С. 24–38.
5. Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Управление сложным теплообменом при создании экстремальных полей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56, № 10. С. 1725–1732.
6. Strong optimal controls in a steady-state problem of complex heat transfer / Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, N.-D. Hoffmann // System Modeling and Optimization: 27th IFIP Conference. Springer International Publishing. 2016. P. 209–219.
7. Pinnau R. Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by the SP1-system // Comm. Math. Sci. 2007. Vol. 5, № 4. P. 951–969.
8. Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects / A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 439, № 2. P. 678–689.
9. Pinnau R., Tse O. Optimal control of a simplified natural convection-radiation model // Comm. Math. Sci. 2013. Vol. 11, № 3. P. 679–707.
10. Месенев П.Р., Чеботарев А.Ю. Анализ оптимизационного метода решения задачи сложного теплообмена с граничными условиями типа Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 1. С. 36–44.
11. Месенев П.Р., Чеботарев А.Ю. Задача сложного теплообмена с условиями типа Коши на части границы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 5. С. 856–863.
12. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
13. Optimization with PDE constraints / M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. Springer, 2009.
14. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Санкт-Петербург: Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2004.

References

1. Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer / A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann. *J. Math. Anal. Appl.* 2014; 412 (1): 520–528.
2. Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model / A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, G.V. Grenkin [et al.]. *Appl. Math. Comput.* 2016; (289): 371–380.
3. Boundary optimal control problem of complex heat transfer model / G.V. Grenkin, A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk [et al.]. *J. Math. Anal. Appl.* 2016; 433 (2): 1243–1260.

4. Grenkin G.V. Algorithm for solving the problem of boundary optimal control in the complex heat exchange model. *Far East. mate. magazine.* 2016; 16 (1): 24–38.
5. Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu. Control of complex heat exchange when creating extreme fields. *Tikhanovskaya. mate. and mate. Physical*. 2016; 56 (10): 1708–1715.
6. Strong optimal controls in a steady-state problem of complex heat transfer / Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, N.-D. Hoffmann. *System Modeling and Optimization: 27th IFIP Conference. Springer International Publishing*, 2016: 209–219.
7. Pinnau R. Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by the SP1-system. *Comm. Math. Sci.* 2007. 5 (4): 951–969.
8. Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects / A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann. *J. Math. Anal. Appl.* 2016; 439 (2): 678–689.
9. Pinnau R., Tse O. Optimal control of a simplified natural convection-radiation model. *Comm. Math. Sci.* 2013; 11 (3): 679–707.
10. Mesenev P.R., Chebotarev A.Yu. Analysis of the optimization method for solving the problem of complex heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type. *Tikhanovskaya type. mate. and mate. Physical.* 2022; 62 (1): 33–41.
11. Mesenev P.R., Chebotarev A.Yu. The problem of complex heat exchange with Cauchy type conditions on a part of the border. *Tikhanovskaya. mate. and mate. Physical*. 2023; 63 (5): 897–904.
12. Fursikov A.V. Optimal control of distributed systems. Theory and applications. Novosibirsk: Scientific Book; 1999.
13. Optimization with PDE constraints / M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, S. Ulbrich. Springer; 2009.
14. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional analysis. St. Petersburg: Nevsky Dialect, BHV-Petersburg; 2004.

Информация об авторе:

Гренкин Глеб Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и моделирования, ФГБОУ ВО «ВВГУ», г. Владивосток, Gleb.Grenkin@vvsu.ru, https://orcid.org/0000-0002-1307-3757

DOI: https://doi.org/10.24866/VVSU/2949-1258/2023-4/127-138

Дата поступления: 05.10.2023 Одобрена после рецензирования: 19.10.2023 Принята к публикации: 30.11.2023