УДК 539.374: 539.224

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРОЦЕССАХ ГОРЯЧЕЙ ПОСАДКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ УЧЕТЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Е. П. Дац, А. В. Ткачева*

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,
690990 Владивосток, Россия
* Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,
681005 Комсомольск-на-Амуре, Россия
E-mails: dats@dvo.ru, 4nansi4@mail.ru

Приведено решение последовательности одномерных краевых задач теории температурных напряжений, определяющих процессы упругопластического деформирования, используемые в технологии горячей посадки цилиндрических тел. Показаны зарождение и развитие пластического течения в материалах элементов сборки с учетом зависимости пределов текучести этих материалов от температуры. Установлено, что в процессе выравнивания температур течение может замедляться, после чего происходят разгрузка и формирование поля остаточных напряжений, обеспечивающих натяг. Определены условия формирования и движения границ областей упругого и пластического состояний как при пластическом течении, так и при разгрузке.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, горячая посадка, остаточные напряжения.

DOI: 10.15372/PMTF20160321

Введение. До настоящего времени нормативными документами рекомендовалось использовать расчетные методики горячей посадки, основанные на теории упругих температурных напряжений [1, 2]. При этом пластические свойства материалов сборки не учитывались, поэтому процессы зарождения и развития пластического течения не исследовались. В середине XX в. Д. Бленд установил, что при значительных температурных градиентах именно температурные напряжения в материале трубы, находящейся в условиях термомеханического нагружения, могут вызывать пластическое течение [3]. При этом следует учитывать значительное уменьшение предела текучести материала с ростом температуры. В [4, 5] представлены результаты решения одномерных контактных задач, полученные с помощью метода конечных элементов. Зависимость предела текучести от температуры полагалась линейной.

В данной работе с использованием результатов численных расчетов, полученных при решении контактных краевых задач для нестационарного уравнения теплопроводности,

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на выполнение научно-исследовательской работы № 2014/292 и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00-283).

© Дац Е. П., Ткачева А. В., 2016

найдены точные решения последовательности деформационных краевых задач теории температурных напряжений, характеризующих процесс сборки. Основное внимание уделяется определению места и времени зарождения течения, исследованию его развития и торможения при разгрузке, вызываемой остыванием материала, а также выявлению закономерностей движения границ областей упругого и пластического течений. В соответствии с известными экспериментальными данными [6, 7] принимается квадратичная зависимость предела текучести от температуры.

Постановка задачи. Распределение температур. Пусть цилиндрическая труба, нагретая до температуры T_* и имеющая при этом размеры $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, насаживается на трубу с размерами $R_0 \leqslant r \leqslant R_1$, имеющую температуру, равную комнатной температуре T_0. В пренебрежении связью между тепловыми и деформационными процессами и влиянием краевых эффектов получаем одномерную задачу теории температурных напряжений. Для нестационарного поля температур в материалах соединяемых цилиндрических тел в цилиндрической системе координат $(r,\, \varphi,\, z)$ уравнение теплопроводности имеет вид

$$T_{,t} = a(T_{,rr} + r^{-1}T_{,r}), \tag{1}$$

где индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей переменной; $T(r,t)$ — текущая температура; a — температуропроводность.

Определим граничные и начальные условия. Начальные условия имеют вид

$$T(r,0) = \begin{cases} T_0, & R_0 \leqslant r \leqslant R_1, \\ T_*, & R_1 \leqslant r \leqslant R_2. \end{cases}$$

При $r = R_0$ и $r = R_2$ происходит контакт разогретого тела с окружающей средой:

$$T_{,r}\big|_{r=R_0,R_2} = \chi T_0. \tag{2}$$

Здесь постоянная χ — коэффициент теплоотдачи разогреваемого или нагретого материала в окружающую среду. На поверхности $r = R_1$ происходит тепловой контакт:

$$[T_{,r}]\big|_{r=R_1} = 0, \qquad [T]\big|_{r=R_1} = 0 \tag{3}$$

(квадратные скобки означают разрыв величины на поверхности $r = R_1$, т. е. $[T] = T^+ - T^-$; T^+, T^- — температура материала поверхности внутренней и внешней труб соответственно). В (3), как и в (1), учтено упрощающее предположение о том, что материалы элементов сборки одинаковы.

Решение уравнения (1) с начальными и граничными условиями (2), (3) может быть получено как аналитически [8, 9], так и численно [10]. Далее будем считать его известным.

Обратимое деформирование. Считаем, что момент времени $t = 0$ является моментом посадки цилиндрических тел. При $t > 0$ распределение температур в обеих частях сборки считается известным. Соответствующие температурные напряжения следует определять с использованием закона Дюамеля — Неймана [11]

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} - 3\alpha K\theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \qquad \theta = T - T_0. \tag{4}$$

Здесь σ_{ij}, e_{ij} — компоненты тензоров напряжений и обратимых (упругих) деформаций; λ, μ, $K = (\lambda + 2\mu/3)$ — характеристики упругости; α — коэффициент линейного температурного расширения изотропного материала сборки; δ_{ij} — компоненты единичного тензора (символы Кронекера). В (4) использованы прямоугольная система декартовых координат и правило суммирования по повторяющимся индексам. Наряду с обратимыми деформациями e_{ij} материал сборки может испытывать и необратимые (пластические) деформации p_{ij}. В силу малости полных деформаций d_{ij} выражение для них можно представить в виде суммы

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} = 0{,}5(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{5}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений. Пластические деформации накапливаются в материале только при напряжениях, удовлетворяющих условию текучести $f(\sigma_{ij}) = 0$. Согласно принципу максимума Мизеса уравнение поверхности $f(\sigma_{ij}) = 0$ в пространстве напряжений выполняет роль пластического потенциала, для которого справедлив ассоциированный закон пластического течения

$$dp_{ij} = d\lambda \, \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad d\lambda > 0. \tag{6}$$

В качестве поверхности нагружения используется призма Треска, уравнение которой имеет вид [12]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k. \tag{7}$$

Здесь σ_i — главные значения тензора напряжений; $k = k(\theta)$ — предел текучести материала. Принимается следующая зависимость предела текучести от температуры:

$$k(r,t) = k(\theta(r,t)) = k_0((T_p - T_0)^{-2}(T_p - T(r,t))^2) \tag{8}$$

(k_0 — предел текучести материала при комнатной температуре T_0; T_p — температура плавления материала). Зависимости (4)–(8) с уравнением равновесия составляют замкнутую систему уравнений для вычисления температурных напряжений по известному распределению температуры. В моменты времени, близкие к моменту посадки ($t = 0$), материалы элементов сборки деформируются упруго. Тогда для напряжений в них, следуя (4), получаем

$$\begin{gathered} \sigma_r^{(v)} = w u_{r,r}^{(v)} + \lambda r^{-1} u_r^{(v)} - m\theta_v, \qquad \sigma_\varphi^{(v)} = \lambda u_{r,r}^{(v)} + w r^{-1} u_r^{(v)} - m\theta_v, \\ \sigma_z^{(v)} = \lambda (r^{-1} u_r^{(v)} + u_{r,r}^{(v)}) - m\theta_v, \qquad w = \lambda + 2\mu, \qquad m = 3\alpha K, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\sigma_r^{(v)}$, $\sigma_\varphi^{(v)}$, $\sigma_z^{(v)}$ — главные значения тензора напряжений; индекс $v = 1$ соответствует внутреннему цилиндру, $v = 2$ — внешнему; $\theta_v(r,t) = T_v(r,t) - \tilde{T}_v$; $\tilde{T}_1 = T_0$, $\tilde{T}_2 = T_*$ — начальные температуры элементов сборки. При этом радиальные $\sigma_r^{(v)}$ и окружные $\sigma_\varphi^{(v)}$ напряжения должны удовлетворять уравнению равновесия

$$\sigma_{r,r}^{(v)} + r^{-1}(\sigma_r^{(v)} - \sigma_\varphi^{(v)}) = 0. \tag{10}$$

При известном распределении температуры в моменты времени $t > 0$ напряжения и перемещения вычисляются путем интегрирования системы уравнений (9), (10):

$$\begin{gathered} u_r^{(v)}(r,t) = r w^{-1} F_v(r_v, r, t) + r C_{v1}(t) + r^{-1} C_{v2}(t), \\ \sigma_r^{(v)}(r,t) = -2\mu w^{-1} F_v(r_v, r, t) + 2g C_{v1}(t) - 2\mu r^{-2} C_{v2}(t), \\ \sigma_\varphi^{(v)}(r,t) = 2\mu w^{-1} F_v(r_v, r, t) - 2m\mu w^{-1}\theta_v(r,t) + 2g C_{v1}(t) + 2\mu r^{-2} C_{v2}(t), \\ \sigma_z^{(v)}(r,t) = 2\lambda C_{v1}(t) - 2m\mu w^{-1}\theta_v(r,t), \\ F_v(r_v, r, t) = m r^{-2} \int\limits_{r_v}^{r} \theta_v(\rho, t)\rho \, d\rho, \qquad r_v = R_{v-1}, \quad g = \lambda + \mu. \end{gathered} \tag{11}$$

Неизвестные функции $C_{v1}(t)$, $C_{v2}(t)$ определяются в результате решения системы линейных уравнений, следующей из граничных условий, включающих условия непрерывности радиальных напряжений и перемещений в месте сопряжения деталей: $\sigma_r^{(1)}(R_1, t) =$

$\sigma_r^{(2)}(R_1,t)$, $u_r^{(1)}(R_1,t) = u_r^{(2)}(R_1,t)$ и условия равенства нулю напряжений на свободных поверхностях труб: $\sigma_r^{(1)}(R_0,t) = 0$, $\sigma_r^{(2)}(R_2,t) = 0$. Вследствие громоздкости выражения для определения функций $C_{v1}(t)$, $C_{v2}(t)$ в данной работе не приводятся.

Пластическое течение. Сначала условие Треска $\sigma_r^{(2)} - \sigma_\varphi^{(2)} = -2k_2$ выполняется на поверхности контакта $r = R_1$ в материале внешней трубы. В некоторый момент времени $t = t_1$ ($t_1 > 0$) на контактной поверхности $r = R_1$ возникает область пластического течения $R_1 \leqslant r \leqslant n(t)$ ($r = n(t)$ — движущаяся граница областей упругого деформирования и пластического течения). В этой области наряду с обратимыми деформациями развиваются необратимые. Соотношения (9), (10) для области течения записываются в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(2)} &= w(u_{r,r}^{(2)} - p_r^{(2)}) + \lambda(r^{-1}u_r^{(2)} - (p_\varphi^{(2)} + p_z^{(2)})) - m\theta_2,\\
\sigma_\varphi^{(2)} &= \lambda(u_{r,r}^{(2)} - (p_r^{(2)} + p_z^{(2)})) + w(r^{-1}u - p_\varphi^{(2)}) - m\theta_2, \qquad (12)\\
\sigma_z^{(2)} &= \lambda(r^{-1}u_r^{(2)} + u_{r,r}^{(2)} - (p_\varphi^{(2)} + p_r^{(2)})) - wp_z^{(2)} - m\theta_2;
\end{aligned}$$

$$\sigma_{r,r}^{(2)} - 2k_2 r^{-1} = 0. \qquad (13)$$

Добавляя к соотношениям (12), (13) следующее из (6), (7) условие пластической несжимаемости $p_\varphi^{(2)} + p_r^{(2)} = 0$, $p_z^{(2)} = 0$, получаем систему уравнений, описывающую напряженно-деформированное состояние в области пластического течения. Решение такой системы уравнений имеет вид

$$\begin{gathered}
\tilde{u}_r^{(2)}(r,t) = rg^{-1}G(R_1,r,t) + rg^{-1}F_2(R_1,r,t) + C_{23}(t)r + r^{-1}C_{24}(t),\\
\tilde{\sigma}_r^{(2)}(r,t) = G(R_1,r,t) + 2gC_{23}(t),\\
\tilde{\sigma}_\varphi^{(2)}(r,t) = G(R_1,r,t) + 2gC_{23}(t) + 2k_2(r,t),\\
\tilde{\sigma}_z^{(2)}(r,t) = \lambda g^{-1}(G(R_1,r,t) + k_2(r,t)) + 2\lambda C_{23}(t) - m\mu g^{-1}\theta_2(r,t), \qquad (14)\\
p_r^{(2)}(r,t) = 0{,}5mg^{-1}\theta_2(r,t) - g^{-1}F_2(R_1,r,t) + w(\mu g)^{-1}k_2(r,t) - r^{-2}C_{24}(t),\\
G(r_0,r,t) = \int_{r_0}^{r} \rho^{-1}k_2(\rho,t)\,d\rho, \qquad g = \lambda + \mu,
\end{gathered}$$

где знак “$\sim$” над компонентами напряжений и перемещений означает, что они соответствуют области пластического течения.

Таким образом, при $t > t_1$ в материале сборки имеется три области, причем в областях $R_0 \leqslant r \leqslant R_1$ и $n(t) \leqslant r \leqslant R_2$ материал деформируется упруго. В области $R_1 \leqslant r \leqslant n(t)$ необратимые деформации накапливаются вследствие наличия пластического течения. В первых двух областях параметры термоупругого деформирования задаются зависимостями (11), а в области течения — зависимостями (14). При этом функции времени, появляющиеся при интегрировании, следует вновь определить из граничных условий на свободных поверхностях $r = R_0$ и $r = R_2$, на поверхности контакта $\sigma_r^{(1)}(R_1,t) = \tilde{\sigma}_r^{(2)}(R_1,t)$, $u_r^{(1)}(R_1,t) = \tilde{u}_r^{(1)}(R_1,t)$ и на упругопластической границе $\tilde{\sigma}_r^{(2)}(n,t) = \sigma_r^{(2)}(n,t)$, $\tilde{u}_r^{(2)}(n,t) = u_r^{(2)}(n,t)$. Кроме того, необходимо определить функцию $n(t)$, задающую положение упругопластической цилиндрической поверхности в текущий момент времени t. Для этого используем условие (7) и равенство нулю пластической деформации ($p_r(n,t) = 0$).

Полученное решение справедливо лишь до некоторого момента времени $t = t_2$ ($t_2 > t_1$), что обусловлено возникновением и развитием новой области пластического течения в материале внутренней трубы. Данная область развивается от свободной поверхности $r = R_0$, и в ней выполняется условие $\sigma_r^{(1)} - \sigma_z^{(1)} = 2k_1$. Следует отметить, что в расчетах такой случай имеет место, если внутренняя труба достаточно тонкая ($R_1 - R_0 \ll R_2 - R_1$). Следовательно, при $t > t_2$ имеется также область пластического течения $R_0 \leqslant r \leqslant m(t)$. Соотношения для напряжений и перемещений в данной области с учетом пластической несжимаемости $p_z^{(1)} + p_r^{(1)} = 0$, $p_\varphi^{(1)} = 0$ следуют из формул (12), (10), в которых индекс 2 заменяется на индекс 1:

$$
\begin{gathered}
\tilde{u}_r^{(1)}(r,t) = (2g)^{-1}[(h^{-1}+1)M_{-h}(R_0,r,t) - (h^{-1}-1)M_h(R_0,r,t) - \\
- N_h(R_0,r,t) - N_{-h}(R_0,r,t)] + r^h C_{13}(t) + r^{-h} C_{14}(t), \\
\tilde{\sigma}_r^{(1)}(r,t) = (2hgr)^{-1}\{q_1[(h-1)M_h(R_0,r,t) - hN_h(R_0,r,t)] - \\
- q_2[(h+1)M_{-h}(R_0,r,t) - hN_{-h}(R_0,r,t)]\} + q_1 r^{h-1} C_{13}(t) - q_2 r^{-h-1} C_{14}(t), \\
\tilde{\sigma}_\varphi^{(1)}(r,t) = (2hgr)^{-1}\{s_1[(h-1)M_h(R_0,r,t) - hN_h(R_0,r,t)] - \\
- s_2[(h+1)M_{-h}(R_0,r,t) - hN_{-h}(R_0,r,t)]\} + \\
+ s_1 r^{h-1} C_{13}(t) - s_2 r^{-h-1} C_{14}(t) - g^{-1}[\lambda k_1(r,t) + \mu m \theta_1(r,t)], \\
\tilde{\sigma}_z^{(1)}(r,t) = (2hgr)^{-1}\{q_1[(h-1)M_h(R_0,r,t) - hN_h(R_0,r,t)] - \\
- q_2[(h+1)M_{-h}(R_0,r,t) - hN_{-h}(R_0,r,t)]\} + \\
+ q_1 r^{h-1} C_{13}(t) - q_2 r^{-h-1} C_{14}(t) - 2k_1(r,t), \qquad (15) \\
p_r^{(1)}(r,t) = (4\mu g r)^{-1}\{\mu[hN_{-h}(r,t) - (h+1)M_{-h}(r,t) - 2gC_{14}(t)] + \\
+ \mu[(h-1)M_h(r,t) - hN_h(r,t) - 2ghC_{13}(t)] - (2g+\mu) r [k_1(r,t) - \mu m \theta_1(r,t)]\}, \\
N_h(r_0,r,t) = r^h \int\limits_{r_0}^{r} r^{-h} k_1(\rho,t)\, d\rho, \qquad M_h(r_0,r,t) = m r^h \int\limits_{r_0}^{r} r^{-h} \theta_1(\rho,t)\, d\rho, \\
h = \sqrt{wg^{-1}}, \quad q_1 = hg + \lambda, \quad q_2 = hg - \lambda, \quad s_1 = h\lambda + w, \quad s_2 = h\lambda - w.
\end{gathered}
$$

Вследствие наличия новой области течения необходимо вновь найти все неизвестные функции интегрирования, определенные в (11) для областей термоупругого деформирования $m(t) \leqslant r \leqslant R_1$, $n(t) \leqslant r \leqslant R_2$, в (14) для области течения $R_1 \leqslant r \leqslant n(t)$ и в (15) для области течения $R_0 \leqslant r \leqslant m(t)$. Требуется также вновь определить функции $n(t)$ ($t > t_2$) и $m(t)$.

Остывание и разгрузка цилиндрических тел. Построенное решение, учитывающее наличие двух областей пластического течения, зависит от времени. Выравнивание температуры в материалах элементов сборки и их остывание приводят к торможению течения и разгрузке. В расчетах показано, что в момент времени $t = t_3$ ($t_3 > t_2$) в окрестности контактной поверхности $r = R_1$ появляется новая граница областей упругого деформирования и пластического течения $r = h(t)$, такая что в области $R_1 \leqslant r \leqslant h(t)$ материал продолжает деформироваться упруго, но в нем имеются накопленные необратимые деформации. Такие пластические деформации не изменяются, но их необходимо учитывать в уравнении равновесия, записанном в перемещениях:

$$
\stackrel{\approx}{u}{}^{(2)}_{r,rr} + (r^{-1} \stackrel{\approx}{u}{}^{(2)}_{r})_{,r} - 2\mu w^{-1}(p_{r,r}^{(2)} + 2r^{-1} p_r^{(2)}) = m w^{-1} (\theta_2)_{,r}. \qquad (16)
$$

Здесь знак “≈” над компонентами напряжений и перемещений означает, что они соответствуют области разгрузки.

Необратимые (пластические) деформации $p_r^{(2)}$ в (16) являются функциями только пространственной координаты r. Интегрируя (16), находим перемещения $\overset{\approx}{u}{}_r^{(2)}(r,t)$ в области $R_1 \leqslant r \leqslant h(t)$; по найденным перемещениям и температуре вычисляем напряжения $\overset{\approx}{\sigma}{}_r^{(2)}(r,t)$, $\overset{\approx}{\sigma}{}_\varphi^{(2)}(r,t)$ в данной области деформирования:

$$\overset{\approx}{u}{}_r^{(2)}(r,t) = rw^{-1}F_2(R_1,r,t) + 2\mu r w^{-1}P_2(r) + rC_{25}(t) + r^{-1}C_{26}(t),$$

$$\overset{\approx}{\sigma}{}_r^{(2)}(r,t) = -2\mu w^{-1}F_2(R_1,r,t) + 4\mu g w^{-1}P_2(r) + 2gC_{25}(t) - 2\mu r^{-2}C_{26}(t),$$

$$\overset{\approx}{\sigma}{}_\varphi^{(2)}(r,t) = 2\mu w^{-1}(F_2(R_1,r,t) - m\theta_2(r,t)) + 4\mu g w^{-1}(P_2(r) + p_r^{(2)}(r)) + 2gC_{25}(t) + 2\mu r^{-2}C_{26}(t),$$

$$\overset{\approx}{\sigma}{}_z^{(2)}(r,t) = 2\mu\lambda w^{-1}(p_r^{(2)}(r) + 2P_2(r) - 2m\lambda^{-1}\theta_2(r,t)) + 2\lambda C_{25}(t),$$

$$P_v(r) = \int\limits_{R_{v-1}}^{r} \rho^{-1} p_r^{(v)}(\rho)\, d\rho.$$

Неизвестные функции времени $C_{25}(t)$ и $C_{26}(t)$, появляющиеся при интегрировании (16), необходимо найти из краевых условий. Другие подобные функции в (11), (14), (15) также требуется вновь определить. К имеющимся краевым условиям на граничных поверхностях $r = R_0$ и $r = R_2$ и контактной поверхности $r = R_1$ добавляются условия на границах областей упругого и пластического течений $r = n(t)$, $r = m(t)$. В данную систему уравнений входят также два новых соотношения на границе областей пластичности и упругой разгрузки $r = h(t)$: $\overset{\approx}{\sigma}{}_r^{(2)}(h,t) = \tilde{\sigma}_r^{(2)}(h,t)$, $\overset{\approx}{u}{}_r^{(2)}(h,t) = \tilde{u}_r^{(2)}(h,t)$. Полученные таким образом функции времени в данной работе не приводятся вследствие их громоздкости.

Торможение пластического течения в материале внутренней трубы начинается с момента времени $t = t_4$ ($t_4 > t_3$). В этот момент времени в окрестности свободной поверхности $r = R_0$ появляется граница областей пластичности и упругой разгрузки $r = q(t)$. В области $R_0 \leqslant r \leqslant q(t)$ деформирование осуществляется по закону, аналогичному (16). При этом уравнение равновесия в перемещениях записывается следующим образом:

$$\overset{\approx}{u}{}_{r,rr}^{(1)} + (r^{-1}\overset{\approx}{u}{}_r^{(1)})_{,r} - 2\mu w^{-1}(p_{r,r}^{(1)} + r^{-1}p_r^{(1)}) = mw^{-1}(\theta_1)_{,r}. \qquad (17)$$

Интегрируя (17), находим

$$\overset{\approx}{u}{}_r^{(1)}(r,t) = rw^{-1}F_1(R_0,r,t) + \mu w^{-1}(rP_1(r) + r^{-1}Q_1(r)) + rC_{15}(t) + r^{-1}C_{16}(t),$$

$$\overset{\approx}{\sigma}{}_r^{(1)}(r,t) = -2\mu w^{-1}F_1(R_0,r,t) + 2\mu w^{-1}(gP_1(r) - \mu r^{-2}Q_1(r)) + {} \\ + 2gC_{25}(t) - 2\mu r^{-2}C_{26}(t),$$

$$\overset{\approx}{\sigma}{}_\varphi^{(1)}(r,t) = 2\mu w^{-1}(F_1(R_0,r,t) - m\theta_1(r,t)) + 2\lambda\mu w^{-1}p_r^{(1)}(r) + {} \\ + 2\mu w^{-1}(gP_1(r) + \mu r^{-2}Q_1(r)) + 2gC_{15}(t) + 2\mu r^{-2}C_{16}(t),$$

$$\overset{\approx}{\sigma}{}_z^{(1)}(r,t) = 2\mu w^{-1}(\lambda P_1(r) + g p_r^{(1)}(r)) + 2\lambda C_{15}(t) + 2mgw^{-1}\theta_1(r,t),$$

$$Q_v(r) = \int\limits_{R_{v-1}}^{r} p_r^{(v)}(\rho)\rho\, d\rho.$$

Добавляя к сформулированным на предыдущих этапах решения краевым условиям условия на движущейся границе областей упругого деформирования и пластического течения $r = q(t)$ ($\tilde{\sigma}_r^{(1)}(q,t) = \overset{\approx}{\sigma}{}_r^{(1)}(q,t)$, $\tilde{u}_1(q,t) = \overset{\approx}{u}{}_1(q,t)$), находим все неизвестные функции

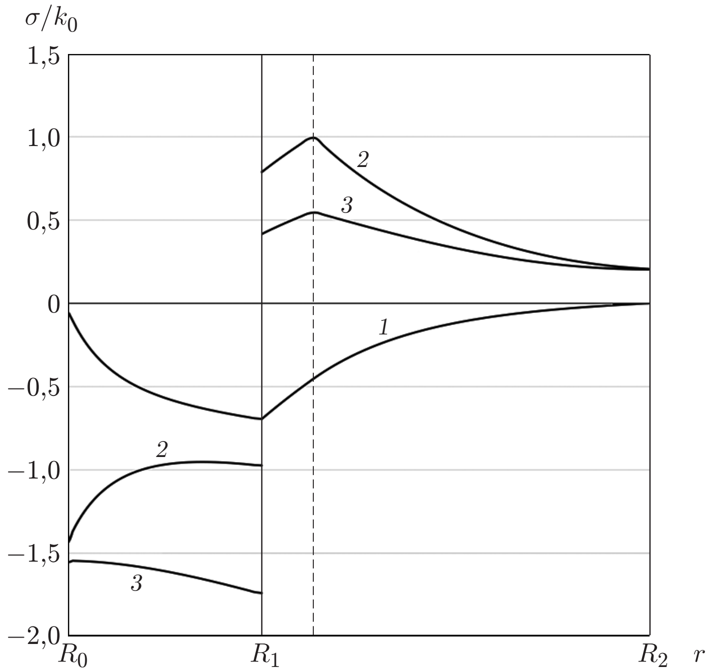

Рис. 1. Распределение напряжений в материалах цилиндрических тел в момент возникновения пластического течения во внутреннем цилиндре:
1 — σ_r, *2* — σ_φ, *3* — σ_z; вертикальные линии — границы областей пластического течения

времени включая $n(t)$, $m(t)$, $h(t)$, $q(t)$. При определении $n(t)$, $m(t)$ используется равенство нулю пластических деформаций, а при определении $h(t)$, $q(t)$ — равенство нулю скоростей пластических деформаций.

С течением времени сначала граница $r = h(t)$ догоняет поверхность $r = n(t)$, а затем граница $r = q(t)$ совпадает с поверхностью $r = m(t)$. Таким образом, области течения исчезают, остаются только области с накопленными пластическими деформациями. Далее происходит выравнивание температуры в материале элементов сборки. В тот момент, когда температура становится независимой от пространственной координаты r, напряжения во всей сборке перестают меняться вплоть до момента ее полного остывания.

На рис. 1, 2 приведены характерные распределения напряжений по элементам сборки в зависимости от пространственной координаты r. На рис. 1 показано распределение напряжений в момент времени, предшествующий моменту начала пластического течения, на рис. 2 — распределение остаточных напряжений. В качестве материала сборки выбрана сталь марки Ст.45, предел текучести которой при комнатной температуре равен 360 МПа. Следует отметить, что на контактной поверхности $r = R_1$ имеет место разрыв напряжений σ_φ. Наличие пластического течения приводит к уменьшению конечного контактного напряжения σ_r на поверхности $r = R_1$ по сравнению с расчетными данными, полученными с использованием теории упругих температурных напряжений (см. рис. 2).

В заключение отметим следующую особенность квазистатических процессов разгрузки за счет температурных напряжений. В большинстве известных точных решений изотермических задач о развитии и торможении пластических течений [13–15] при разгрузке граница областей упругого деформирования и пластического течения останавливается и от нее в противоположном направлении движется новая граница, за которой течение отсутствует. В рассмотренном случае только температурного воздействия границы областей пластичности и упругой разгрузки всегда движутся от граничных поверхностей $r = R_1$,

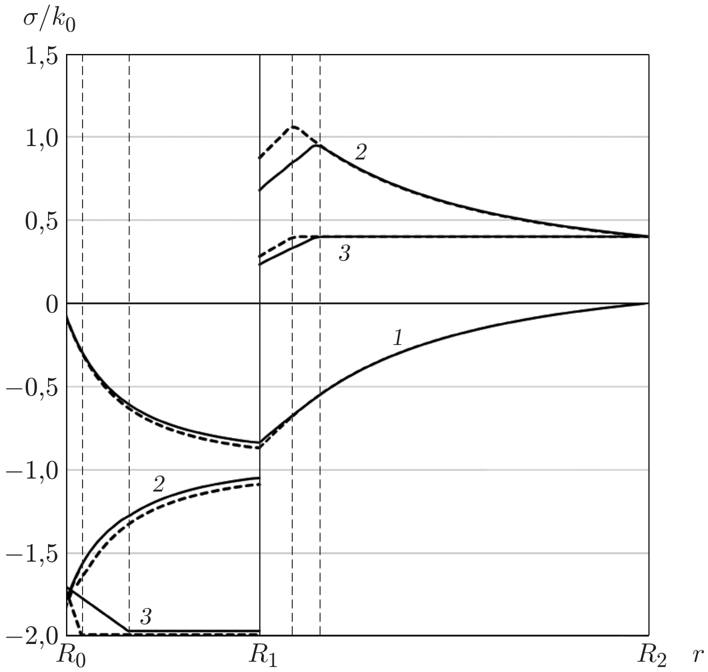

Рис. 2. Распределение остаточных напряжений в материале сборки:
1 — σ_r, *2* — σ_φ, *3* — σ_z; штриховые линии — напряжения в случае линейной зависимости предела текучести от температуры; вертикальные линии — границы областей пластического течения

$r = R_0$, что необходимо учитывать при постановке задач о температурных напряжениях и разработке соответствующих алгоритмов расчетов.

Расчеты, проведенные для случая линейной зависимости предела текучести от температуры, показали, что область течения имеет меньшие размеры, незначительно увеличивается конечный натяг и существенно увеличивается разность окружных напряжений на поверхности контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Белкин И. М.** Допуски и посадки. М.: Машиностроение, 1992.
2. **Мягков В. Д.** Допуски и посадки: Справ. / В. Д. Мягков, М. А. Полей, А. Б. Романов, В. А. Горагинский. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1982. Ч. 1.
3. **Владимиров С. Н., Земан С. К., Крохмаль Е. В.** Математическая модель деформации зоны контакта сопряженных осесимметричных тел // Исследовано в России. [Электрон. ресурс]. 2005. № 8. С. 1682–1693.
4. **Bland D. R.** Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // J. Mech. Phys. Solids. 1956. V. 4. P. 209–229.
5. **Bengeri M., Mack W.** The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic — plastic shrink fit // Acta Mech. 1994. V. 103. P. 243–257.
6. **Kovacs A.** Residual stresses in thermally loaded shrink fits // Period. Polytech. Ser. Mech. Engng. 1996. V. 40, N 2. P. 103–112.
7. **Лозинский М. Г.** Строение и свойства металлов и сплавов при высоких температурах. М.: Металлургия, 1963.

8. **Белов А. Ф.** Строение и свойства авиационных материалов. М.: Металлургия, 1989.
9. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967.
10. **Коваленко А. Д.** Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965.
11. **Кузнецов Г. В.** Разностные методы решения задач теплопроводности: Учеб. пособие / Г. В. Кузнецов, М. А. Шеремет. Томск: Том. политехн. ун-т, 2007.
12. **Боли Б.** Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. М.: Мир, 1964.
13. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
14. **Ковтанюк Л. В.** О продавливании упруговязкопластического материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764–767.
15. **Буренин А. А.** Большие необратимые деформации и упругое последействие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальнаука, 2013.
16. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.** Развитие и торможение течения упруговязкопластической среды в цилиндрической трубе // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, № 5. С. 788–798.

Поступила в редакцию 19/VI 2014 г.,
в окончательном варианте — 25/III 2015 г.