

# АНАЛИЗ РАСЧЁТНЫХ СПОСОБОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ПАССАЖИРОПОТОКАХ НА МАРШРУТАХ ГОРОДСКОГО ТРАНСПОРТА

В.Н. Ембулаев, Л.А. Николаева, Е.В. Сербина

## *Аннотация.*

*Рассмотрены вопросы, характеризующие процессы оказания транспортных услуг в системе пассажиропотоков. Разработана модель расчетного определения маршрутных корреспонденций транспортных потоков. Предложена схема перевозочного процесса и представлен подход к системе обработки информации о пассажиропотоках, что позволит оперативно решать организационно-экономические задачи в системе управления в реальном масштабе времени.*

Проблемы управления перевозками пассажиров в настоящее время становятся более актуальными в связи с насыщением транспортных потоков на маршрутах подвижных единиц. Необходимость расширения сферы услуг по перевозке пассажиров и разработка математической модели расчетного определения маршрутных корреспонденций обусловлена не только качественными факторами в системе оказания транспортных услуг, но и процессами активизации туристско-рекреационной сферы в регионах, выступающими потенциальными точками экономического роста. Разработка системы обработки информации о пассажиропотоках и развитие информационного обеспечения решения транспортных задач позволит в оперативном режиме принимать решения для улучшения качества перевозочных процессов на маршрутах городов и обеспечит оперативное решение вопросов организации и управления по обеспечению устойчивых темпов экономического развития субъектов хозяйствования.

Пассажирские потоки между остановочными пунктами (ОП) на маршруте определяются, как правило, при обработке материалов обследования пассажиропотоков ручным способом. В конечном итоге элементы маршрутных корреспонденций пассажиропотоков (МКП) могут быть представлены в виде следующей матрицы (табл.1).

Таблица 1

**Матрица элементов маршрутных корреспонденций пассажиропотоков**

Номера ОП входа	Номера ОП выхода							Вошло в ТС
	1	2	3	4	5	...	n	

1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$	$x_{15}$	...	$x_{1n}$	$a_1$
2		$x_{22}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{25}$	...	$x_{2n}$	$a_2$
3			$x_{33}$	$x_{34}$	$x_{35}$	...	$x_{3n}$	$a_3$
4				$x_{44}$	$x_{45}$	...	$x_{4n}$	$a_4$
5					$x_{55}$	...	$x_{5n}$	$a_5$
.						...	.	.
.						...	.	.
.						...	.	.
n							$x_{nn}$	$a_n$
Вышло	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	...	$b_n$	

*Примечание.*  $n$  – число ОП на маршруте;  $a_i$  – число пассажиров, вошедших в транспортное средство (ТС) на  $i$ -м ОП;  $b_j$  – число пассажиров, вышедших из ТС на  $j$ -м ОП;  $x_{ij}$  – число проехавших пассажиров от  $i$ -го до  $j$ -го ОП на маршруте,  $i \leq j$ .

При обработке материалов обследования пассажиропотоков ручным способом вначале получают элементы МКП, а затем, суммируя их по строчкам и столбцам, определяют данные входа-выхода по каждому ОП на маршруте.

Математическая формулировка обратной задачи, то есть по имеющимся данным входа-выхода определить элементы МКП, сводится к следующему [1].

Задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=i}^n x_{ij} = a_i; \quad \sum_{i=1}^j x_{ij} = b_j; \quad x_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1)$$

Причем  $a_i$  и  $b_j$  удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2)$$

Так как система (1) состоит из  $2n$  уравнений с  $n(n+1)/2$  неизвестными, то единственное решение системы возможно только при  $n \leq 3$ . При  $n > 3$  существует, в принципе, бесчисленное множество решений и без дополнительного предположения относительно распределения пассажиропотоков между ОП маршрута нельзя однозначно определять элементы МКП.

В работах [1, 2, 3] при различных дополнительных предположениях относительно распределения пассажиропотоков между ОП маршрута разработаны различные модели расчётного определения МКП по данным входа-выхода. Однако практические расчёты показывают, что численные значения при этом остаются неизменными. Почему так происходит и анализируется в данной работе.

Для объяснения решения задачи определения элементов МКП по данным входа-выхода рассмотрим следующую схему перевозочного процесса на маршруте городского транспорта (см. рис. 1).

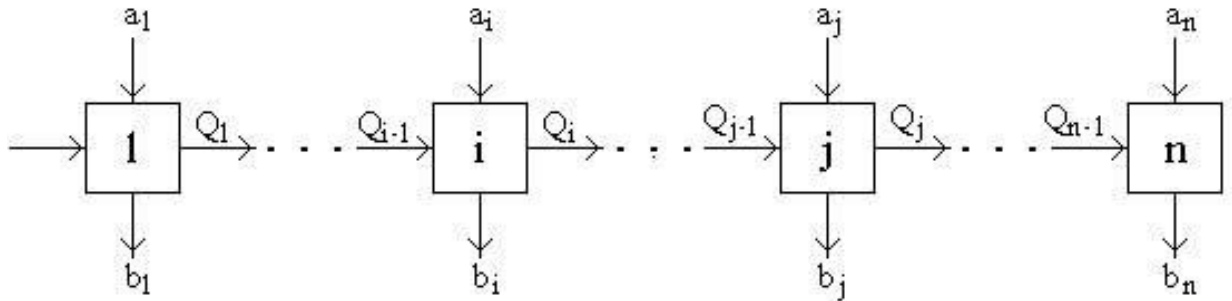


Рис. 1. Схема перевозочного процесса на маршруте городского транспорта

Данная схема описывает следующие ситуации перевозочного процесса. К  $j$ -му ОП подъезжает ТС. В салоне находится  $Q_{j-1}$  пассажиров, среди которых  $a_{ij}$  вошли на  $i$ -м ОП с намерением выйти из ТС не ранее  $j$ -го ОП на маршруте

$$a_{ij} = a_i - \sum_{r=i+1}^{j-1} x_{ir}, \quad (3)$$

причем для  $j=i+1$   $a_{ij} = a_i$ .

Другими словами,  $a_{ij}$  – это число пассажиров, вошедших в салон ТС на  $i$ -м ОП и не вышедших из ТС ранее  $j$ -го ОП, то есть оставшихся в салоне ТС из  $a_i$  пассажиров за вычетом всех тех, которые проехали от  $i$ -го до  $(i+1)$ , от  $i$ -го до  $(i+2)$ ,..., от  $i$ -го до  $(j-1)$  ОП по маршруту.

Во время стоянки ТС на  $j$ -м ОП вначале из салона выходит группа в количестве  $b_j$  пассажиров, а затем в салон входит группа из  $a_j$  пассажиров. Данные  $a_j$  и  $b_j$  фиксируются во время обследования пассажиропотоков подсчётом вошедших и вышедших пассажиров на каждом ОП маршрута. При отправлении ТС от  $j$ -го ОП в салоне будет находиться  $Q_j$  пассажиров:

$$Q_j = (Q_{j-1} - b_j) + a_j = \sum_{r=1}^j (a_r - b_r). \quad (4)$$

Следовательно, для любого  $1 < j \leq n$  имеется множество  $Q_{j-1}$  пассажиров, среди которых  $a_{ij}$  потенциально корреспондирующие от  $i$ -го до  $j$ -го ОП, где  $1 \leq i < j$ . Из множества  $Q_{j-1}$  выходит группа в количестве  $b_j$  пассажиров. Число  $x_{ij}$  пассажиров, одновременно принадлежащие  $a_{ij}$  и  $b_j$ , является искомой величиной при решении задачи (1)–(2).

При таком описании перевозочного процесса на маршруте следует, что выход любого пассажира на  $j$ -м ОП из всех подъехавших  $Q_{j-1}$  есть независимое событие, вероятность которого равна  $1/Q_{j-1}$ . Из этого следует, что выход любой группы пассажиров из ТС в количестве  $b_j$  человек на  $j$ -м ОП является равновероятным событием. Общее число событий, когда из  $Q_{j-1}$  пассажиров может выйти различных групп в количестве  $b_j$  человек равно числу сочетаний из  $Q_{j-1}$  пассажиров по  $b_j$ , то есть  $C_{Q_{j-1}}^{b_j}$ .

Но вместе с  $Q_{j-1}$  пассажирами подъехали и  $a_{ij}$ , из которых некоторые могут выйти на  $j$ -м ОП в группе с  $b_j$ , - обозначим их через  $\lambda_{ij}$ . Безусловно, что  $\lambda_{ij}$  является случайной величиной. Группу  $\lambda_{ij}$  человек из  $a_{ij}$  можно выбрать  $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}}$  различными способами. Но для каждой определенной группы  $\lambda_{ij}$  остальных пассажиров  $(b_j - \lambda_{ij})$  при этом можно выбрать  $C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$  различными способами, и общее число благоприятствующих случаев будет  $C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}$ .

Следовательно, решение задачи определения элементов МКП по данным входа-выхода требует вероятностной интерпретации. Так, например, в работе [1] показан вывод формулы расчёта вероятности события, что на  $j$ -ом ОП выйдет вместе с  $b_j$  ровно  $\lambda_{ij}$  человек, принадлежащих  $a_{ij}$ :

$$p_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}, \quad (5)$$

где

$$\max [0, (a_{ij} + b_j - Q_{j-1})] \leq \lambda_{ij} \leq \min [a_{ij}, b_j]. \quad (6)$$

А такое распределение случайной величины называется гипергеометрическим [4].

Из всех допустимых значений  $\lambda_{ij}$  на отрезке (6) её максимальное значение принимается в качестве искомой величины

$$x_{ij} = \arg \max_{\lambda_{ij}} p_{b_j}(\lambda_{ij}). \quad (7)$$

Отметим, что  $x_{ij}$ , определяемые по формуле (7), имеют максимальные значения для конкретных  $i$  и  $j$ , поэтому должны выполняться следующие условия:

$$p_{b_j}(x_{ij}-1)/p_{b_j}(x_{ij}) \leq 1 \quad \text{и} \quad p_{b_j}(x_{ij})/p_{b_j}(x_{ij}+1) \geq 1. \quad (8)$$

Решая эти неравенства относительно  $x_{ij}$  при допущении, что  $Q_{j-1} \rightarrow \infty$  и  $b_j \rightarrow \infty$ , получим

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} b_j}{Q_{j-1}}, \quad (9)$$

то есть максимум вероятности достигается при том значении  $x_{ij}$ , которое равно математическому ожиданию случайной величины  $\lambda_{ij}$  на отрезке (6).

Как следует из постановки задачи (1)–(2), единственное решение возможно только при  $n=3$ , которое можно представить в следующем виде [3]:

$$x_{11} = x_{22} = x_{33} = 0, \quad x_{12} = \frac{a_1 b_2}{Q_1}, \quad x_{13} = \frac{(Q_1 - b_2) a_1 b_3}{Q_1 Q_2}, \quad x_{23} = \frac{a_2 b_3}{Q_2}. \quad (10)$$

Для рассмотрения решения системы (1) при  $n=4$  сделаем следующее допущение: предположим, что структура формул определения идентичных элементов МКП при  $n=3$  и  $n=4$  остается неизменной. В этом случае система (1) при  $n=4$  имеет следующее решение:  $x_{ij}$  для  $1 \leq i, j \leq 3$  и  $i \leq j$  представлены в виде (10), а остальные  $x_{ij}$  для  $1 \leq i \leq 4$  и  $j=4$  определяются следующим образом с учётом того, что  $b_4 = Q_3$ :

$$\begin{aligned} x_{14} &= a_{14} - x_{11} - x_{12} - x_{13} = a_1 - \frac{a_1 b_2}{Q_1} - \frac{(Q_1 - b_2) a_1 b_3}{Q_1 Q_2} = \frac{(Q_1 - b_2)(Q_2 - b_3) a_1}{Q_1 Q_2} = \\ &= \frac{(Q_1 - b_2)(Q_2 - b_3) a_1 b_4}{Q_1 Q_2 Q_3}; \end{aligned}$$

$$x_{24} = a_2 - x_{22} - x_{23} = a_2 - \frac{a_2 b_3}{Q_2} = \frac{(Q_2 - b_3) a_2}{Q_2} = \frac{(Q_2 - b_3) a_2 b_4}{Q_2 Q_3};$$

$$x_{34} = a_3 - x_{33} = a_3 = \frac{a_3 b_4}{Q_3}; \quad x_{44} = 0.$$

Аналогичный анализ решения поставленной задачи в условиях предположения, что структура формул определения идентичных элементов МКП при  $n=4$  и  $n=5$ , затем при  $n=5$  и  $n=6$  и т.д., остаётся неизменной, приводит к следующей общей формуле определения элементов МКП по данным входа-выхода:

$$x_{ij} = \prod_{r=i+1}^{j-1} \left(1 - \frac{b_r}{Q_{r-1}}\right) \frac{a_i b_j}{Q_{j-1}}. \quad (11)$$

Подробный вывод формулы (11) приводится в работе [2].

Простыми преобразованиями формулу (11) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \prod_{r=i+1}^{j-1} \left(1 - \frac{b_r}{Q_{r-1}}\right) \frac{a_i b_j}{Q_{j-1}} = \left(1 - \frac{b_{i+1}}{Q_i}\right) \left(1 - \frac{b_{i+2}}{Q_{i+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{b_{j-1}}{Q_{j-2}}\right) \frac{a_i b_j}{Q_{j-1}} \\ &= \left[1 - \frac{b_{i+1}}{Q_i} - \left(\frac{b_{i+2}}{Q_{i+1}} - \frac{b_{i+1} b_{i+2}}{Q_i Q_{i+1}}\right) - \dots - \frac{b_{i+1} b_{i+2} \dots b_{j-1}}{Q_i Q_{i+1} \dots Q_{j-2}}\right] \frac{a_i b_j}{Q_{j-1}} = \left[a_1 - \frac{a_i b_{i+1}}{Q_i} - \left(1 - \frac{b_{i+1}}{Q_i}\right) \frac{a_i b_{i+2}}{Q_{i+1}} - \dots \right. \\ &\quad \left. - \prod_{r=i+1}^{j-1} \left(1 - \frac{b_r}{Q_{r-1}}\right) \frac{a_i b_{j-1}}{Q_{j-2}}\right] \frac{b_j}{Q_{j-1}} = (a_i - x_{i,i+1} - x_{i,i+2} - \dots - x_{i,j-1}) \frac{b_j}{Q_{j-1}} = (a_i - \sum_{r=i+1}^{j-1} x_{ir}) \frac{b_j}{Q_{j-1}} = \frac{a_{ij} b_j}{Q_{j-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом формулы (3) равенство (11) преобразуется в равенство (9), то есть формулы (11) и (9) идентичны для вычисления элементов МКП.

В работе [3] Крупником В.Ш. приводится еще одна формула определения элементов МКП, которая получена в результате анализа решения поставленной задачи в условиях предположения о неизменности структуры формул вычисления идентичных элементов МКП с любым числом ОП на маршруте:

$$x_{ij} = \frac{(a_i - \sum_{r=i+1}^{j-1} x_{ir}) b_j}{c_{j-1}}, \quad (12)$$

где  $c_{j-1} = \sum_{t=1}^{j-2} (a_t - \sum_{r=t+1}^{j-1} x_{tr}) + a_{j-1}$ .

Преобразуем выражение для  $c_{j-1}$ :

$$c_{j-1} = \sum_{t=1}^{j-2} (a_t - \sum_{r=t+1}^{j-1} x_{tr}) + a_{j-1} = \sum_{t=1}^{j-2} a_{t,j-1} + a_{j-1} = Q_{j-1}.$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} c_{j-1} &= \sum_{t=1}^{j-2} (a_t - \sum_{r=t+1}^{j-1} x_{tr}) + a_{j-1} = \sum_{t=1}^{j-1} a_t - \sum_{t=1}^{j-2} (\sum_{r=t+1}^{j-1} x_{tr}) = \sum_{t=1}^{j-1} a_t - \sum_{r=t+1}^{j-1} (\sum_{t=1}^{j-2} x_{tr}) = \sum_{t=1}^{j-1} a_t - \sum_{r=2}^{j-1} b_r \\ &= \sum_{t=1}^{j-1} (a_t - b_t) = Q_{j-1}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $c_{j-1}$  в формуле (12) идентично  $Q_{j-1}$  в формуле (4). А с учетом формулы (3) равенство (12) преобразуется в равенство (9), то есть формулы (12) и (9) также идентичны для вычисления элементов МКП.

Из описания перевозочного процесса по маршруту (см. рис. 1) получено следующее: имеется множество  $Q_{j-1}$  пассажиров, среди которых  $a_{ij}$  потенциально корреспондирующие из  $i$  в  $j$ . Из множества  $Q_{j-1}$  выходит группа из  $b_j$  пассажиров. Число  $\lambda_{ij}$  пассажиров, одновременно принадлежащих  $a_{ij}$  и  $b_j$ , является искомой величиной.

Рассмотрим два случая: 1 – когда  $a_{ij} \geq b_j$ ; 2 – когда  $a_{ij} \leq b_j$ .

Случай 1.  $a_{ij} \geq b_j$ . Возможны следующие события и соответственно число их сочетаний:

$$\begin{aligned} b_j \in a_{ij} \text{ и } 0 \in (Q_{j-1} - a_{ij}), & \quad C_{a_{ij}}^{b_j} \text{ и } C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^0; \\ (b_j - 1) \in a_{ij} \text{ и } 1 \in (Q_{j-1} - a_{ij}), & \quad C_{a_{ij}}^{b_j-1} \text{ и } C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^1; \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ (b_j - k) \in a_{ij} \text{ и } k \in (Q_{j-1} - a_{ij}), & \quad C_{a_{ij}}^{b_j-k} \text{ и } C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^k, \end{aligned}$$

где  $k = \min [b_j, (Q_{j-1} - a_{ij})]$ .

В этом случае величина  $\lambda_{ij}$  принимает целочисленные значения на интервале  $(b_j - k) \leq \lambda_{ij} \leq b_j$ , распределение вероятностей которой имеет следующий вид:

$$P_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}.$$

Случай 2.  $a_{ij} \leq b_j$ . Возможны следующие события и соответственно число их сочетаний:

$$\begin{aligned} a_{ij} \in a_{ij} \text{ и } (b_{j-1} - a_{ij}) \in (Q_{j-1} - a_{ij}), & \quad C_{a_{ij}}^{a_{ij}} \text{ и } C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-a_{ij}}; \\ (a_{ij} - 1) \in a_{ij} \text{ и } (b_{j-1} - a_{ij} + 1) \in (Q_{j-1} - a_{ij}), & \quad C_{a_{ij}}^{a_{ij}-1} \text{ и } C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-a_{ij}+1}; \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ \cdot & \quad \cdot \\ (a_{ij} - k) \in a_{ij} \text{ и } (b_{j-1} - a_{ij} + k) \in (Q_{j-1} - a_{ij}), & \quad C_{a_{ij}}^{a_{ij}-k} \text{ и } C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-a_{ij}+k}, \end{aligned}$$

где  $k = \min [a_{ij}, (Q_{j-1} - a_{ij}) - (b_j - a_{ij})] = \min [a_{ij}, (Q_{j-1} - b_j)]$ .

В этом случае величина  $\lambda_{ij}$  принимает целочисленные значения на интервале  $(a_{ij} - k) \leq \lambda_{ij} \leq a_{ij}$ , распределение вероятностей которой имеет следующий вид:

$$P_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{a_{ij}-\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-a_{ij}+\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}}.$$

Обобщение полученных результатов приводит к следующему распределению вероятностей случайной величины  $\lambda_{ij}$ :

$$P_{b_j}(\lambda_{ij}) = \frac{C_{a_{ij}}^{\lambda_{ij}} C_{Q_{j-1}-a_{ij}}^{b_j-\lambda_{ij}}}{C_{Q_{j-1}}^{b_j}},$$

где  $[b_j - \min [b_j, (Q_{j-1} - a_{ij})]] \leq \lambda_{ij} \leq b_j$ , если  $a_{ij} \geq b_j$ ;

или  $[a_{ij} - \min [a_{ij}, (Q_{j-1} - b_j)]] \leq \lambda_{ij} \leq a_{ij}$ , если  $a_{ij} \leq b_j$ .

Эти два выражения можно записать в одном:

$$\max [0, (a_{ij} + b_j - Q_{j-1})] \leq \lambda_{ij} \leq \min [a_{ij}, b_j].$$

А это есть соответственно формулы (5) и (6). И вычисление элементов МКП осуществляется по формуле (9).

Таким образом, предложенные различными авторами математические модели расчётного определения элементов МКП по данным входа-выхода есть одна и та же формула, представленная в разных видах. **Авторы статьи не претендуют на оригинальность подхода, вместе с тем, представленная модель позволит автоматизировать процессы информационного обеспечения при решении транспортных задач в управлении перевозки пассажиров в условиях инновационных преобразований экономики.**

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматизация управления транспортными системами / А. Артынов, В. Ембулаев, А. Пупышев, В. Скалецкий. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
2. Вентцель Е.С. – Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964г.
3. Ембулаев В.Н. Теоретические основы и методы управления транспортной системой крупного города / Владивосток, Изд-во Дальнаука, 2004. – 212 с.
4. Крупник В.Ш. Структура рейсовой матрицы корреспонденций и энтропия в системе городского пассажирского транспорта // Методы оптимального планирования и управления в городском хозяйстве (пассажирский транспорт): Сб. – Владивосток, 1976. –



С. 45–49.

5. Николаева Л.А., Лайчук О. В. Инновационный процесс как фактор структурных преобразований экономики (теоретико-методологический аспект) // *New tendencies in the development of international business. Proceedings of the 5 International Joint Conference/ Part I* . Seoul 2007, с 116.