ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, том 407, № 6, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

СИНГУЛЯРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТЯХ НА КОНУСЕ

© 2006 г. **В. В. Катрахов, С. В. Киселевская**

Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 25.11.2004 г.

Поступило 08.12.2005 г.

Целью данной работы является изучение сингулярной эллиптической краевой задачи в области на конусе, содержащей его вершину – особую точку. Однако с использованием определенного преобразования она рассматривается сразу в области Ω на плоскости. Обратным преобразованием ее можно трансформировать в краевую задачу в области на конусе. В работе определяются и изучаются новые функциональные пространства, которые совпадают с пространствами Соболева–Никольского–Бесова вне особой точки. Также вводится понятие сигма-следа в особой точке. Основной результат состоит в доказательстве однозначной разрешимости поставленной сингулярной краевой задачи.

В последние десятилетия построена общая теория эллиптических задач в областях, границы которых содержат особенности – углы, конические точки, ребра. Одной из основных работ здесь является монография С.А. Назарова, Б.А. Пламеневского [1]. Также можно отметить работы М. Костебеля, М. Доуге и др. (см. [2] и ссылки там), в которых рассматриваются как общие эллиптические системы, так и некоторые прикладные задачи электро- и гидростатики. Рассмотренные в указанных работах особенности решений в угловых точках нами считаются слабыми и в рамках данной работы будут относится к регулярным – здесь речь идет о степенных особенностях с положительным показателем степени. В данной работе мы изучаем особенности, которые нельзя даже отнести к степенным, поскольку они структурно совпадают с изолированными особенностями аналитических или гармонических функций.

Некоторые результаты по этой тематике опубликованы в [3–6].

Рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2$ ограниченную область Ω. Пусть начало координат $\mathbb{O}$ принадлежит границе $\partial\Omega$ и является угловой точкой. Будем считать, что $\partial\Omega$ состоит из четырех частей: из точки $\mathbb{O}$, из двух прямолинейных участков G', G'', исходящих из точки $\mathbb{O}$ и из оставшейся части границы G. Через Φ обозначим угол от G' до G'' отсчитываемый против часовой стрелки внутри области. Данная конфигурация проиллюстрирована на рисунке. 1.

Через r, φ будем обозначать полярные координаты с центром в точке $\mathbb{O}$ и с осью абсцисс, совпадающей по направлению с отрезком G'. Дополнительно будем считать, что заменой переменных $\varphi \mapsto \psi = \dfrac{2\pi\varphi}{\Phi}$ отрезок G'' переводится в G', а G переходит в замкнутый, гладкий контур. Такая ситуация возникает, например, при разрезании конуса по одной из образующих и при последующем развертывании на плоскость, поэтому рассматриваемую ниже краевую задачу можно трактовать как краевую задачу в области на конусе.

Мы будем рассматривать краевую задачу вида

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

с краевым условием на части границы G

$$u|_G = g(x), \quad x \in G, \tag{2}$$

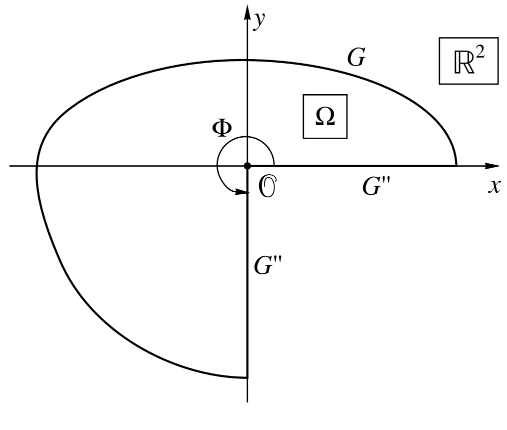

Рис. 1.

Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Владивосток

Владивостокский государственный университет экономики сервиса

и в точке $\mathbb{O}$

$$\sigma u|_{\mathbb{O}} = \Psi(\varphi), \quad \varphi \in [0, \Phi], \tag{3}$$

при дополнительном условии периодичности с периодом Φ (условиеΠ) по угловой переменной φ всех участвующих в этой задаче функций – это, по сути дела, есть краевое условие на частях границы G', G''. Понятие сингулярного сигма-следа $\sigma u|_{\mathbb{O}}$ будет введено ниже.

Здесь потребуются два класса функциональных пространств, условно называемые нами сингулярными и регулярными. В сингулярные пространства будут входить функции с сильными особенностями в особой точке, а в регулярные – со слабыми (т.е., условно говоря, регулярными) особенностями.

Введем функцию гладкой срезки $\chi(r)$, $r \ge 0$, – бесконечно дифференцируемую функцию, равную 1 при $0 \le r \le 1$ и нулю при $r \ge 2$, и положим $\chi_R(r) = \chi(r/R)$.

Обозначим через $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash\mathbb{O})$ пространство, состоящее из функций f таких, что при любом $R \in$ $\in (0, R_\circ)$ функция $(1 - \chi_R)f$ будет принадлежать пространству $H^s(\Omega)$, где $2R_\circ > 0$ – минимальное расстояние от точки $\mathbb{O}$ до части границы G.

Здесь и далее символ $H_s(\equiv W^s_2)$ обозначает пространства Соболева–Никольского–Бесова.

Наделим пространство $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ топологией, определяемой семейством полунорм

$$\|f\|_{H^s_{\mathrm{loc}}} = p_{s,R}(f) = \|(1-\chi_R)f\|_{H^s(\Omega)}, \quad 0 < R < R_\circ.$$

Данная топология превращает $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ в полное топологическое векторное пространство. Функций из пространства $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ вне любой окрестности вершины сектора устроены так же, как и функции из H^s, а в самой вершине могут иметь произвольную особенность.

Введем преобразование

$$\Pi_\Phi\colon f(r, \varphi) \mapsto (\Pi_\Phi f)(r, \varphi) = f\left(r, \frac{2\pi\varphi}{\Phi}\right),$$

являющееся указанной выше заменой угловой переменной. При этом область Ω преобразуется в ограниченную область $\Pi_\Phi\Omega = \Omega_\Pi$ с гладкой границей $\Pi_\Phi G = G_\Pi$.

Обозначим через $C^\infty_\Pi(\overline{\Omega})$ такое множество функций, что $\Pi_\Phi C^\infty_\Pi(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega_\Pi})$.

Введем теперь пространство $H^s_\Pi(\Omega)$ как подпространство пространства $H^s(\Omega)$, получаемое замыканием линеала $C^\infty_\Pi(\overline{\Omega})$ по норме пространства $H^s(\Omega)$:

$$\|f\|_{H^s_\Pi(\Omega)} = \sqrt{\sum \int_\Omega \left|D^l_x D^m_y f\right|^2 d\Omega} = \sqrt{\sum \left\|D^l_x D^m_y f\right\|^2_{L_2(\Omega)}},$$

где частные производные $D^l_x = \dfrac{\partial^l}{\partial x^l}$, $D^m_y = \dfrac{\partial^m}{\partial x^m}$ и суммирование осуществляется по всем целым неотрицательным l, m, таким, что $l + m \le s$. По сути пространство $H^s_\Pi(\Omega)$ состоит из функций пространства $H^s(\Omega)$, удовлетворяющих в соответствующем смысле условию периодичности Π[1].

Обозначим через $H^s_{\Pi,\mathrm{loc}}(\Omega\backslash\mathbb{O})$ пространство, состоящее из функций f таких, что при любом $R \in (0, R_\circ)$ функция $(1 - \chi_R)f$ будет принадлежать пространству $H^s_\Pi(\Omega)$.

Определим теперь пространство $H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)$ как пополнение (в терминологии – обобщенное замыкание) линеала $C^\infty_\Pi(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$ по норме

$$\|f\|_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)} = \sqrt{\sum_{l=0}^{s/2} \left\|\Delta^l f\right\|^2_{L_2(\Omega)}}$$

при четном $s \ge 0$ и

$$\|f\|_{H^1_{\Pi,\Delta}(\Omega)} =$$
$$= \sqrt{\|f\|^2_{H^{s-1}_{\Pi,\Delta}(\Omega)} + \left\|D_x\Delta^{(s-1)/2} f\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|D_y\Delta^{(s-1)/2} f\right\|^2_{L_2(\Omega)}}$$

при нечетных s.

$H^s_{\Pi,\Delta}$ является гильбертовым пространством, непрерывно вложенным в $H^s_\Pi(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. В соответствии с разработанной в [7] техникой можно отождествить $H^s_\Pi(\Omega)$ с подпространством пространства $H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)$, т.е. $H^s_\Pi(\Omega) \subset H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)$. Заметим попутно, что в случае гладкой границы ($\Phi = \pi$) последние два пространства на самом деле совпадают.

Множество функций $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\nu(0, R)$ определяется как множество всех функций f, допускающих представление $f = \mathcal{P}_\nu g$, в котором $g \in \overset{\circ}{C}{}^\infty[0, R)$, т.е.

[1] Это означает совпадение на G' и G'' следов самой функции и всех ее производных, включая дробные (тех, которые существуют у функции из $H^s(\Omega)$ на границе в зависимости от величины s). Например, при $s = 0$ никаких следов не существует, поэтому никакого условия Π_Φ в таком случае рассматривать не следует.

в других обозначениях $\overset{\circ}{C}{}_{\nu}^{\infty}(0,\ R) = \mathcal{P}_{\nu}\overset{\circ}{C}{}^{\infty}[0,\ R)$. Оператор преобразования $\mathcal{P}_{\nu}$ имеет вид

$$\mathcal{P}_{\nu} f(r) = \frac{-\sqrt{\pi} r^{-\nu-1/2}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)} \int_r^{\infty} P^{\circ}_{\nu-1/2}\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{df(\rho)}{d\rho} d\rho,$$

а обратный к нему на соответствующих пространствах оператор преобразования $\mathcal{S}_{\nu}$ определяется, например, по формуле

$$\mathcal{S}_{\nu} f(r) =$$

$$= \frac{-2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_r^{\infty} P^{\circ}_{\nu-1/2}\left(\frac{r}{\rho}\right) f(\rho)\rho^{\nu+1/2}(d\rho),$$

где $P^{\circ}_{\nu-1/2}$ – функция Лежандра первого рода.

Введем множество $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ функций f из $C^{\infty}_{\Pi}(\overline{\Omega}\backslash\mathbb{O})$, для которых справедливо разложение

$$f = f(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{2} f_{kl}(r) Y^l_k(\varphi),$$

где коэффициенты Фурье

$$f_{kl}(r) = \int_0^{\Phi} f(r, \varphi) Y^l_k(\varphi) d\varphi,$$

при этом предполагается, что натуральное число K свое для каждой функции f и что функции $r^{-\lambda_k}\chi_R(r) f_{kl}(r)$ принадлежат линеалу $\overset{\circ}{C}{}_{\nu}^{\infty}(0,\ 2R_{\circ})$. Здесь $Y^1_k = \sqrt{\frac{2}{\Phi}}\sin(\lambda_k\varphi)$ и $Y^2_k = \sqrt{\frac{2}{\Phi}}\cos(\lambda_k\varphi)$, где $\lambda_k = \frac{2\pi k}{\Phi}$ при $k > 0$, и $Y^1_0 = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}$.

На $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ определим при фиксированном целом $s \ge 0$ и всех R, $0 < R < R_{\circ}$, систему норм

$$\|f\|^2_{s,R} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} \left\| r^{-\lambda_k}\chi_R f_{kl} \right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu}(0,2R)} +$$

$$+ \|(1-\chi_R) f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)}.$$

Пространство $\overset{\circ}{H}{}^{\infty}_{\nu}(0, R)$ для целых $s \ge 0$ определяется как обобщенное замыкание множества $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\nu}(0, R)$ по норме

$$\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu}(0,R)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)} \left\| D^s(\mathcal{S}_{\nu} f) \right\|_{L_2(0,R)}, \qquad (4)$$

где $L_2(0, R)$ – лебегово пространство.

Справедливо вложение $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega) \subset H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ и для любой функции f из $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ имеет место оценка $\|f\|_{s,R} \ge p_{s,R}(f)$. Таким образом, это вложение будет и непрерывным.

Для функций $f \in T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ определим σ-след в точке $\mathbb{O}$ как предел

$$\sigma f|_{\mathbb{O}} = \lim_{r\to 0} \sigma f(r, \varphi),$$

понимаемый в классическом поточечном смысле. Здесь

$$\sigma f(r, \varphi) = \frac{f_{\circ}(r)}{\ln r} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} r^{\lambda_k} f_{kl}(r) Y^l_k(\varphi).$$

Отметим, что σ представляет собой интегральный оператор, действующий по угловым переменным, а сам σ-след в точке $\mathbb{O}$ можно представить в связи с этим в виде

$$\sigma f|_{\mathbb{O}} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\Phi}\int_0^{\Phi} f(r, \varphi') \times$$

$$\times\left(\frac{2r^{2\pi/\Phi}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi}(\varphi-\varphi')\right) - 2r^{4\pi/\Phi}}{1 - 2r^{2\pi/\Phi}\cos\left(\frac{2\pi}{\Phi}(\varphi-\varphi')\right) + r^{4\pi/\Phi}} + \frac{1}{\ln r}\right) d\varphi'.$$

Таким образом, σ-след по угловым переменным является нелокальным объектом.

Основное функциональное пространство $M^s_{\Pi}(\Omega)$ определим как обобщенное замыкание в H^s_{loc} пространства $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ по топологии, определяемой системой норм (4) по $0 < R < R_{\circ}$. Эта топология сильнее топологии пространства $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, и поэтому можно доказать по общей схеме из [7] справедливость вложения $M^s_{\Pi}(\Omega) \subset H^s_{\Pi,\text{loc}}(\Omega)$.

Введем пространство σ-следов $A[0, \Phi]$ как множество функций, определенных на отрезке $[0, \Phi]$ и допускающих разложение в ряд Фурье

$$\Psi(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} \Psi_{kl} Y^l_k(\varphi),$$

для которых для любого $h > 0$ конечны нормы

$$\|\Psi\|^2_h = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} h^{-2\lambda_k}|\Psi_{kl}|^2.$$

Пространство $A[0, \Phi]$ является полным счетно-нормируемым топологическим пространством, т.е. пространством Фреше.

Обозначим через S_R круговой сектор радиуса R с центром в точке $\mathbb{O}$ и раствора $\Phi \in (0, 2\pi]$ такой, что при некотором $R_\circ > 0$ пересечение области Ω с кругом с центром в $\mathbb{O}$ радиуса $2R_\circ$ совпадает с сектором $S_{2R_\circ}$.

Краевая задача (1)–(3) с дополнительным краевым условием Π порождает оператор вида

$$\mathcal{A}_\Pi \colon u \mapsto \mathcal{A}u \equiv \{\Delta u, u|_G, \sigma u|_{\mathbb{O}}\}.$$

Снабдим пространство $\mathcal{M}_\Pi^s \equiv M_\Pi^s(\Omega) \times H_\Pi^{s+3/2}(G) \times$ $\times A_\Pi$ топологией прямого произведения.

Т е о р е м а 1 (теорема единственности). *Пусть* $f \in M_\Pi^s(\Omega)$, $\Psi \in A_\Pi$ *и* $s > 0$.

Тогда у краевой задачи (1)–(3) *существует не более одного решения в* $M_\Pi^{s+2}(\Omega)$.

Л е м м а 1. *Пусть* $s \geq 0$ *– четное число и функция* $f(r, \varphi) \in M_\Pi^s(S_{\bar{R}})$ *обращается в нуль при* $r > \bar{R} -$ $- \varepsilon$ *для фиксированного достаточно малого положительного* ε.

Тогда существует функция $u \in M_\Pi^{s+2}(S_{\bar{R}})$ *такая, что*

$$\Delta u = f(x),$$
$$\sigma u|_{\mathbb{O}} = 0,$$

и отображение непрерывно из пространства $M_\Pi^s(S_{\bar{R}})$ *в* $M_\Pi^{s+2}(S_{\bar{R}})$.

Основной результат состоит в следующем утверждении.

Т е о р е м а 2. *Оператор* $\mathcal{A}_\Pi$ *имеет обратный* $\mathcal{A}_\Pi^{-1}$ *непрерывно отображающий пространство* $\mathcal{M}_\Pi^s(\Omega)$ *на пространство* $M_\Pi^{s+2}(\Omega)$.

При доказательстве основной теоремы для исследования регулярной составляющей решения мы пользовались соответствующим видоизменением общей теории сильно эллиптических краевых задач изложенной, например, в [8–10] применительно к введенным функциональным пространствам. Сингулярная составляющая решения изучалась с помощью специально разработаной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
2. *Costabel M., Dauge M.* // Math. Nachr. 2002. Bd. 235. S. 29–49.
3. *Катрахов В.В.* // Мат.сб. 1991. Т. 182. № 6. С. 849–876.
4. *Катрахов В.В.* // ДАН. 1981. Т. 259. № 5. С. 1041–1045.
5. *Катрахов В.В., Киселевская С.В.* Сингулярная эллиптическая краевая задача в областях с угловыми точками. Препр. ИПМ ДВО РАН. №8. Владивосток, 2004. 28 с.
6. *Катрахов В.В., Киселевская С.В.* Эллиптическая краевая задача на конусе. Препр. ИПМ ДВО РАН. № 7. Владивосток, 2004. 32 с.
7. *Катрахов В.В., Мазелис Л.С.* Непрерывность, пополнение, замыкание в метрических пространствах. Владивосток: ДВГУ, 2000. 112 с.
8. *Ладынежская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
9. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
10. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.