

УДК 519.634

ЛУЧЕВЫЕ ПРИФРОНТОВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ В КАЧЕСТВЕ СРЕДСТВА ВЫДЕЛЕНИЯ РАЗРЫВОВ В ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТАХ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ¹⁾

© 2009 г. Е. А. Герасименко*, А. В. Завертан**

(*690041 Владивосток, ул. Радио, 5, ИАПУ ДВО РАН; **690600 Владивосток, ул. Гоголя, 39а, ВГУЭС)

e-mail: ekaterina_gerasi@mail.ru; alex_zavertan@mail.ru

Поступила в редакцию 10.04.2008 г.

Положение поверхностей разрывов скоростей и интенсивности разрывов на них на каждом временном шаге расчетов динамики деформирования предлагается определять посредством включения в неявную конечно-разностную схему расчетов асимптотического (лучевого) разложения решения за этими фронтальными поверхностями. Указывается метод построения лучевых разложений, основывающийся на рекуррентной записи геометрических и кинематических условий совместности разрывов производных функций, терпящих разрыв на движущейся поверхности. Предлагаемое иллюстрируется на простейшем примере антиплоского движения несжимаемой упругой среды. Библ. 19. Фиг. 7.

Ключевые слова: методы выделения разрывов, лучевой метод, нелинейная упругость, ударные волны, задачи газовой динамики.

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмические приемы указания на каждом временном шаге газодинамических расчетов положения поверхностей разрывов и величин разрывов разработаны, и их изложение составляет часто содержание отдельных параграфов в обобщающих изданиях (см. например, [1]–[4]). Однако в динамике деформируемых тел аналогичные приемы чаще всего оказываются неприменимыми. Связано это с тем, что распространение граничных возмущений по деформируемым телам представляет собой совокупность, по существу, двух взаимодействующих процессов – распространения деформаций изменения объема (как в газовой динамике) и формы. При этом закономерности в распространении сдвиговых деформаций оказываются принципиально отличными от более изученных закономерностей в распространении объемных деформаций (см. [5]). Указанные усложнения по сравнению с газовой динамикой привели к тому, что алгоритмы выделения разрывов в динамике деформируемых тел до настоящего времени не рассматривались, а расчеты проводились на основе различных схем сквозного счета (см. [6]–[8]). В тех случаях, когда нестационарность задачи особенно существенна, от схем сквозного счета приходится отказываться, и проблема выделения разрывов становится первостепенной. В [9], [10] для этой цели предложено использовать прифронтные асимптотические разложения. Одним из наиболее эффективных способов построения таких разложений является лучевой метод, с историей развития которого можно познакомиться в обзорной публикации (см. [11]). Метод обрел популярность в 60–80-е годы прошлого века в теории пластического течения, гиперболической теории теплообмена, динамических задачах теории упругости, при исследовании слабых волн в нелинейно-упругой среде. Позднее было разработано обобщение метода на случай ударного деформирования (см. [12], [13]). Оказалось, что построенные таким образом прифронтные разложения решений позволяют отслеживать положение волновых фронтов в процессе численного решения краевых задач ударного деформирования. Такой прием уже реализован для плоских ударных волн в [10]. В настоящей статье предлагается алгоритм выделения поверхностей разрывов деформаций в численных расчетах неоднородных задач динамики деформирования с криволинейными и расходящимися лучами. Иллюстрацией предлагаемому алгоритму служит решение двумерной зада-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (грант № 06-III-A-01-009).

чи об антиплоском движении несжимаемой нелинейно-упругой среды, аналитическое решение которой лучевым методом подробно изложено в [18].

1. ОБЩИЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СРЕДЫ

Система уравнений адиабатического движения нелинейно-упругой несжимаемой изотропной среды имеет вид

$$\begin{aligned} v_i &= \dot{u}_i + u_{i,j} v_j, \quad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j} v_j), \\ 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}, \quad \sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{jk}} (\delta_{ik} - 2\alpha_{ik}), \\ W &= (a - \mu) I_1 + a I_2 + b I_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + c I_1^4 + d I_2^2 + k I_1^2 I_2 + \dots, \\ \dot{u}_i &= \partial u_i / \partial t, \quad u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где x_i , $i = 1, 2, 3$ – декартовы прямоугольные координаты; u_i и v_i – компоненты векторов перемещения и скорости точек среды; α_{ij} и σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Эйлера–Коши; $\rho = \text{const}$ – плотность среды; W – функция упругого потенциала среды с малой нелинейностью, заданная ее разложением в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния; $I_1 = \alpha_{ii}$ и $I_2 = \alpha_{ij} \alpha_{ji}$ – инварианты тензора деформаций; p_0 – добавочное гидростатическое давление; μ , a , b , κ , θ , c , d , k – упругие модули среды. Условие несжимаемости позволяет остановиться на изучении только сдвиговых деформационных процессов, исключая объемное деформирование. Последнее тем более интересно, что в литературе исследование поперечных волн представлено скромнее, нежели продольных.

Уравнения системы (1.1) представляют собой законы сохранения в дифференциальной форме и выполняются всюду, где входящие в них функции непрерывны. Далее рассматривается случай, когда терпят разрыв производные первого порядка от поля перемещений, т.е. задача включает ударные волны. На ударных волнах сохраняют силу интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии, которые принимают вид динамических условий совместности

$$\begin{aligned} [\rho(v_i v_i - G)] &= 0, \\ [\sigma_{ij}] v_j &= \rho^+ (v_j^+ v_j - G) [v_i], \\ \sigma_{ij}^+ [v_i] v_j &= \rho^+ (v_i^+ v_i - G) \left(\frac{[v_i][v_i]}{2} - [e] \right) - [q_j] v_j, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где v_i – единичная нормаль к поверхности разрывов Σ направленная в сторону движения Σ ; индексами + и – обозначены значения величин перед волной и за ней соответственно; G – скорость движения Σ в направлении нормали. Помимо (1.2), разрывы функций на Σ связаны с разрывами их производных, геометрическими и кинематическими условиями совместности

$$\begin{aligned} [f_{,i}] &= \left[\frac{\partial f}{\partial v} \right] v_i + a^{\alpha\beta} [f]_{,\beta} g_{ij} x_{j,\alpha}, \\ [f] &= \frac{\delta [f]}{\delta t} - \left[\frac{\partial f}{\partial v} \right] G, \\ [f] &= f^+ - f^-, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = f_{,i} v_i, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

а с разрывами производных k -го порядка рекуррентными соотношениями (см. [14], [15]). В (1.3) g_{ij} и $\alpha^{\alpha\beta}$ – компоненты пространственной и поверхностной метрики; обозначению f могут соответствовать компоненты любого тензорного поля на Σ или в пространстве, а греческими индексами после запятой обозначена операция ковариантного дифференцирования по поверхностной координате, $\delta/\delta t$ – операция дифференцирования по времени в данной точке, Σ – дельта-производная (см. [16]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что несжимаемая среда, в которой имеется цилиндрическая полость с направляющей L_0 в форме эллипса

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(y) = a_1 \cos y, \\x_2 &= f_2(y) = a_2 \sin y, \quad 0 \leq y \leq 2\pi,\end{aligned}$$

до момента удара недеформирована. Начиная с момента $t = 0$ в среде осуществляется антиплоское движение

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = u(x_1, x_2, t),$$

вызванное ударным воздействием на L_0 которое приводит к граничным перемещениям

$$u|_{L_0} = F(y, t), \quad F(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F}{\partial t^k} \Big|_0 t^k \approx v_0(y)t + \frac{a_0(y)t^2}{2} + \dots, \quad (2.1)$$

где y – параметр вдоль L_0 . Будем считать, что граничное условие (2.1) задано симметрично относительно координатных осей, поэтому рассмотрим решение только в первом квадранте $0 \leq y \leq \pi/2$. Условие $v_0 \neq 0$ приводит к мгновенному формированию поперечной ударной волны $\Sigma(t)$ с момента времени $t = 0$, которая отделяет зону деформирования от зоны покоя в материале.

Из (1.2) находим скорость ударной волны $G(y, t)$ в виде асимптотического ряда по ее интенсивности:

$$\begin{aligned}G &= C \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{\omega_1}{C} \right)^{2k} \right) = C \left(1 + \gamma_1 \frac{\omega_1^2}{C^2} + \dots \right), \quad C = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \\ \gamma_1 &= \frac{a + b + \kappa + d}{2\mu}, \quad \omega_1 = [\dot{u}].\end{aligned}$$

Следствием непрерывности поля перемещений на фронте $\Sigma(t)$ будет условие

$$u|_{\bar{r}_\Sigma} = 0, \quad \bar{r}_\Sigma(y, t) = \bar{r}_0(y) + \int_0^t G(y, \xi) \bar{\mathbf{v}}(y, \xi) d\xi, \quad (2.2)$$

где $\bar{r}_0(y)$ и $\bar{r}_\Sigma(y, t)$ – радиус-векторы некоторой точки с постоянным значением параметра y в начальный и текущий моменты времени соответственно. Отметим, что в двумерном случае компоненты вектора нормали $\bar{\mathbf{v}}(y, t)$ – неизвестные величины, которые должны быть определены совместно с полем перемещений и геометрией фронта волны в процессе решения задачи. Из (1.1) следует система уравнений двумерного антиплоского движения среды

$$\begin{aligned}u_{,11} \{ 1 + 3\alpha u_{,1}^2 + \alpha u_{,2}^2 \} + u_{,22} \{ 1 + \alpha u_{,1}^2 + 3\alpha u_{,2}^2 \} + 4\alpha u_{,12} u_{,1} u_{,2} + \dots &= \frac{\ddot{u}}{C^2} + \dots, \\ -p_{,1} - 2\varphi_1 u_{,11} u_{,1} - 2\varphi_2 u_{,12} u_{,2} - (1 + \gamma)(u_{,12} u_{,2} + u_{,22} u_{,1}) + \dots &= 0, \\ -p_{,2} - 2\varphi_1 u_{,22} u_{,2} - 2\varphi_2 u_{,12} u_{,1} - (1 + \gamma)(u_{,11} u_{,2} + u_{,12} u_{,1}) + \dots &= 0, \\ \alpha = \frac{a + b + \kappa + d}{\mu}, \quad \gamma = \frac{a}{\mu}, \quad \varphi_1 = \frac{\beta}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{2b + \kappa}{2\mu}, \quad p = \frac{p_0 - a + \mu}{\mu}.\end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что система трех уравнений (2.3) содержит только две неизвестные функции $u(x_1, x_2, t)$ и $p(x_1, x_2, t)$ и тем самым переопределена. Следовательно, антиплоское движение в несжимаемой среде осуществимо только при тождественном равенстве двух последних уравнений. Это возможно при специальных дополнительных соотношениях между константами упругого потенциала, результатом выполнения которых становится представление (см. [17], [18]).

$$W = -2\mu I_1 - \mu I_2 + b I_1^2 + (b - \mu) I_1 I_2 - \theta I_1^3 + c I_1^4 + \frac{b - \mu}{4} I_2^2 + \left(b - \mu - \frac{3}{2} \theta \right) I_1^2 I_2 + \dots,$$

где μ, b, θ, c – независимые константы среды, через которые выражены остальные.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЛУЧЕВОЕ РЕШЕНИЕ

За фронтом ударной волны Σ поле перемещений будем искать в виде лучевого ряда

$$u^I(s, y, t) \approx u^0(s, y, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \omega_k(y, t_\Sigma) (t - t_\Sigma)^k, \quad t \geq t_\Sigma, \quad (3.1)$$

$$t_\Sigma(y, s) = \int_0^s G^{-1}(y, \xi) d\xi, \quad \omega_k = \left[\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right],$$

в котором s – лучевая координата (расстояние от $\Sigma(0)$ до данной точки пространства вдоль луча), y – координата эйконала, индексами 0 и I обозначено решение в области перед Σ и за Σ соответственно.

Для ударных волн коэффициенты лучевого ряда ω_k в (3.1) удовлетворяют бесконечной системе нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\delta \omega_k / \delta t = g_k(\omega_1, \dots, \omega_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

которая представляет собой записанное в разрывах на Σ уравнение движения (2.3) относительно функции $u(s, y, t)$ и его частные производные по времени соответствующего порядка. В отличие от уравнений затухания для линейризованных задач или для слабых волн, система (3.2) не рекуррентна, и, следовательно, не допускает последовательного интегрирования. Адаптировать традиционный лучевой метод для задач ударного деформирования удалось благодаря включению в (3.1) дополнительных разложений разрывов в ряды по δ -производным в окрестности нуля (см. [12]):

$$\omega_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta^n \omega_{k0}}{\delta t^n} t^n, \quad \frac{\delta^n \omega_{k0}}{\delta t^n} = \left. \frac{\delta^n \omega_k}{\delta t^n} \right|_{t=0}. \quad (3.3)$$

Такой подход предполагает, что решение строится для малых послеударных времен. Уравнения (3.2) справедливы и при $t = 0$ и совместно с (3.1), (3.3) и граничным условием (2.1) составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно постоянных ω_{k0} лучевого ряда.

Например, для выполнения краевого условия (2.1), выраженного усеченным рядом до квадратных слагаемых включительно, достаточно ограничиться нулевым шагом метода и определить только величины ω_{10} , ω_{20} , $\delta \omega_{10} / \delta t$. Если краевое условие (2.1) включает больше слагаемых, то потребуется и большее число шагов метода.

Первое уравнение из (3.2), записанное при $t = 0$, дает связь между искомыми величинами

$$\frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} = \frac{2\alpha C^{-2} \omega_{10}^2 \omega_{20} + 2H_0 C \omega_{10} \left(1 + \frac{\alpha \omega_{10}^2}{2 C^2} \right)}{2 + 3\alpha \omega_{10}^2 C^{-2} - \frac{3}{2} \alpha^2 \omega_{10}^4 C^{-4} + \dots} + \dots, \quad (3.4)$$

$$H_0 = \frac{-a_1 a_2}{2(a_1^2 \sin^2 y + a_2^2 \cos^2 y)^{3/2}},$$

где H_0 – средняя кривизна $\Sigma(0)$, e – эксцентриситет эллипса. С учетом разложений (3.3) расстояние вдоль луча определяется по формуле

$$s = \int_0^t G(y, \xi) d\xi = C \left(1 + \frac{\alpha}{2} \omega_{10}^2 C^{-2} \right) t + \alpha C^{-1} \omega_{10} \frac{\delta \omega_{10} t^2}{\delta t} + \dots \quad (3.5)$$

Обращение зависимости (3.5) позволяет определить момент, когда фронт ударной волны прошел через данную точку пространства:

$$t_\Sigma(s, y) = \left(1 - \frac{\alpha \omega_{10}^2}{2 C^2} + \dots \right) \frac{s}{C} - \frac{\alpha}{2} C^{-2} \omega_{10} \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t} \left(\frac{s}{C} \right)^2 + \dots \quad (3.6)$$

Лучевое разложение (3.1) для функции перемещения за волной с учетом (3.3)–(3.6) переписывается в виде

$$u(s, y, t) = -\left(\omega_{10} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}t_{\Sigma} + \dots\right)(t - t_{\Sigma}) - \frac{1}{2}(\omega_{20} + \dots)(t - t_{\Sigma})^2 + \dots, \quad (3.7)$$

где многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка. Сопоставление краевого условия (2.1) с рядом (3.7), в котором s нужно положить равным 0, показывает, что $\omega_{10} = -v_0$, $\omega_{20} = -a_0$. Геометрия волнового фронта задается соотношениями, следующими из (2.2):

$$x_i = f_i(y, t) = f_{i0}(y) + \int_0^t G(y, \xi) v_i(y, \xi) d\xi, \quad (3.8)$$

причем компоненты вектора нормали v_i зависят от текущего положения волнового фронта, что не позволяет проинтегрировать (3.8). Аппроксимируя v_i рядами, аналогичными (3.3), и вычисляя их δ -производные согласно правилам, определенным в [14], получим

$$v_i(y, t) = v_{i0} + \frac{\delta v_{i0}}{\delta t}t + \dots, \quad (3.9)$$

$$v_{10} = \frac{a_2}{a_1 \sqrt{a_2^2 - a_1^2 \operatorname{tg}^2 y}}, \quad v_{20} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 \operatorname{ctg}^2 y}},$$

$$\left. \frac{\delta v_i}{\delta t} \right|_{t=0} = -\frac{\alpha}{C} a^{11} x_{i,y} \omega_1 \omega_{1,y} \Big|_{t=0} = -\frac{\alpha}{C} a_0^{11} x_{i0,y} \omega_{10} \omega_{10,y}.$$

Подставляя (3.9), (3.3) и (3.4) в (3.8), после несложных преобразований получаем параметрическое представление поверхности разрывов $\Sigma(t)$:

$$x_1 = f_1(y, t) = a_1 \cos y + \frac{a_2 C \left(1 + \frac{\alpha}{2} \omega_{10}^2 C^{-2}\right) t}{\sqrt{a_2^2 + a_1^2 \operatorname{tg}^2 y}} +$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha a_1^2 \omega_{10} \omega_{10,y} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \omega_{10}^2 C^{-2}\right)}{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{ctg}^2 y} + \frac{\alpha a_2 \omega_{10} \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t}}{C \sqrt{a_2^2 + a_1^2 \operatorname{tg}^2 y}} \right\} \frac{t^2}{2} + \dots, \quad (3.10)$$

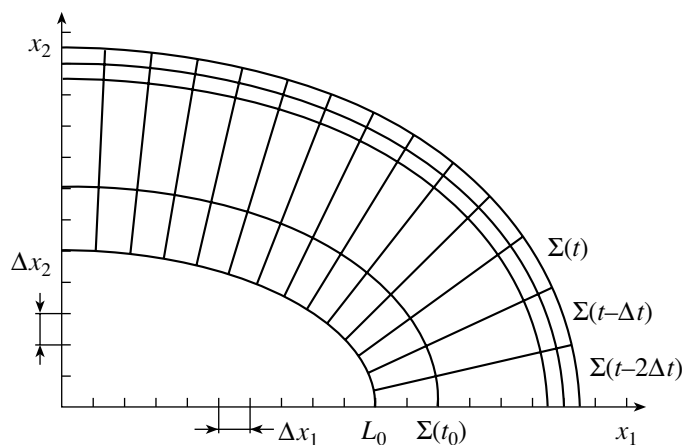
$$x_2 = f_2(y, t) = a_2 \sin y + \frac{a_1 C \left(1 + \frac{\alpha}{2} \omega_{10}^2 C^{-2}\right) t}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{ctg}^2 y}} +$$

$$+ \left\{ -\frac{a_2^2 \alpha \omega_{10} \omega_{10,y} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \omega_{10}^2 C^{-2}\right)}{a_2^2 + a_1^2 \operatorname{tg}^2 y} + \frac{\alpha a_1 \omega_{10} \frac{\delta \omega_{10}}{\delta t}}{C \sqrt{a_1^2 + a_2^2 \operatorname{ctg}^2 y}} \right\} \frac{t^2}{2} + \dots$$

Таким образом, построено аналитическое решение задачи, пригодное для малых послееударных времен. Расчет процесса дальнейшего деформирования проведем численно, определяя на каждом шаге новое положение поверхности разрывов с помощью прифронтного лучевого разложения и используя аналитическое решение (3.7) в качестве начальных данных для численной схемы.

4. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РАСЧЕТОВ

Полагаем, что до момента $t = t_0$ (см. фиг. 1) лучевое решение (3.7) является приемлемым, а положение волнового фронта описывается зависимостями (3.10). Начиная с момента $t = t_0$ уравне-



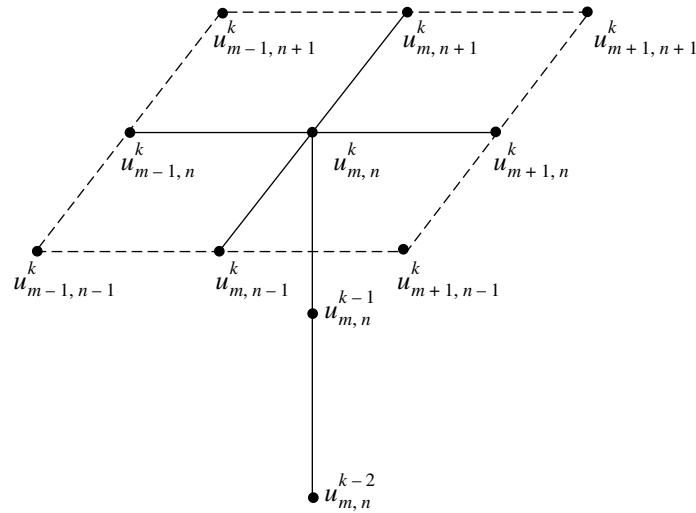
Фиг. 1.

ния движения интегрируем численно с помощью неявной конечно-разностной схемы. Для этого введем равномерную прямоугольную сетку с шагами Δt и $\Delta x_1, \Delta x_2$ по времени и пространству, соответственно, в узлах которой и будем искать решение. Входящие в уравнения частные производные заменим их конечно-разностными аппроксимациями по соседним узлам сетки:

$$\begin{aligned}
 u_{,1} &\approx \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2, t) - u(x_1 - \Delta x_1, x_2, t)}{2\Delta x_1}, \\
 u_{,2} &\approx \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - u(x_1, x_2 - \Delta x_2, t)}{2\Delta x_2}, \\
 u_{,11} &\approx \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t) + u(x_1 - \Delta x_1, x_2, t)}{\Delta x_1^2}, \\
 u_{,22} &\approx \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t) + u(x_1, x_2 - \Delta x_2, t)}{\Delta x_2^2}, \\
 u_{,12} &\approx \frac{1}{4\Delta x_1 \Delta x_2} (u(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, t) - u(x_1 + \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2, t) - \\
 &\quad - u(x_1 - \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, t) + u(x_1 - \Delta x_1, x_2 - \Delta x_2, t)), \\
 \dot{u} &\approx \frac{u(x_1, x_2, t) - u(x_1, x_2, t - \Delta t)}{\Delta t}, \\
 \ddot{u} &\approx \frac{u(x_1, x_2, t) - 2u(x_1, x_2, t - \Delta t) + u(x_1, x_2, t - 2\Delta t)}{\Delta t^2}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в первое из уравнений (2.3), получаем следующую разностную схему:

$$\begin{aligned}
 &\frac{u_{m+1,n}^k - 2u_{m,n}^k + u_{m-1,n}^k}{\Delta x_1^2} \left[1 + 3\alpha \frac{(u_{m+1,n}^k - u_{m-1,n}^k)^2}{4\Delta x_1^2} + \alpha \frac{(u_{m,n+1}^k - u_{m,n-1}^k)^2}{4\Delta x_2^2} \right] + \\
 &+ \frac{u_{m,n+1}^k - 2u_{m,n}^k + u_{m,n-1}^k}{\Delta x_2^2} \left[1 + \alpha \frac{(u_{m+1,n}^k - u_{m-1,n}^k)^2}{4\Delta x_1^2} + 3\alpha \frac{(u_{m,n+1}^k - u_{m,n-1}^k)^2}{4\Delta x_2^2} \right] +
 \end{aligned}$$



Фиг. 2.

$$\begin{aligned}
 + \frac{\alpha(u_{m+1,n+1}^k - u_{m+1,n-1}^k - u_{m-1,n+1}^k + u_{m-1,n-1}^k)}{4\Delta x_1^2 \Delta x_2^2} (u_{m+1,n}^k - u_{m-1,n}^k)(u_{m,n+1}^k - u_{m,n-1}^k) = & \quad (4.2) \\
 = \frac{u_{m,n}^k - 2u_{m,n}^{k-1} + u_{m,n}^{k-2}}{C^2 \Delta t^2}, &
 \end{aligned}$$

$$u_{m,n}^k = u(m\Delta x_1, n\Delta x_2, k\Delta t), \quad m, n, k = 0, 1, 2, \dots$$

Вычисления по схеме (4.2) должны производиться на шаблоне, показанном на фиг. 2. Для узлов, лежащих на координатных осях, недостающие значения перемещений в точках $(-\Delta x_1, n\Delta x_2)$ и $(m\Delta x_1, -\Delta x_2)$ получим из соображений симметрии

$$u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2) = u(x_1, -x_2).$$

Положение фронта ударной волны на каждом временном слое, границу L_0 , а также заданные на них функции будем интерполировать кубическими сплайнами с числом узлов много меньшим числа пересечений сплайна с линиями сетки. Пусть, для простоты, узлы сплайнов, соответствующие функциям, заданным на одной границе, совпадают. Также учтем, что при движении $\Sigma(t)$ значение параметра y , соответствующие любому узлу, остается неизменным.

Поскольку на пересечении фронта с Ox_1 функции $f_1(y, t)$ и $f_2(y, t)$ имеют максимум и перегиб соответственно, а на пересечении с Ox_2 меняются ролями, то граничные условия для сплайнов, интерполирующих координатных функции волнового фронта, должны быть заданы следующим образом:

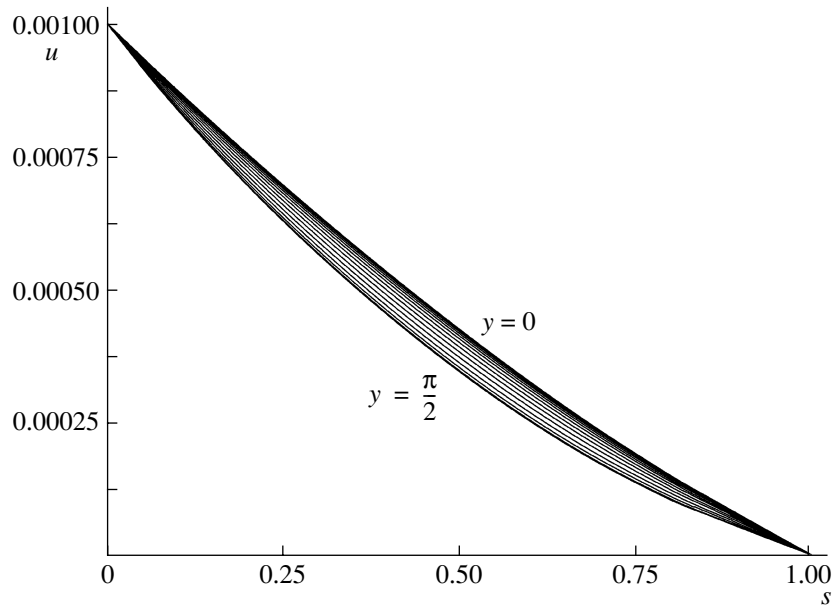
$$f_1'((0, t)) = 0, \quad f_2'\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad f_2''(0, t) = 0, \quad f_1''\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad f_i' = \frac{\partial f_i}{\partial y}.$$

Аналогичным образом будем интерполировать функции, заданные на $\Sigma(t)$, такие, как ω_1 и ω_2 . В силу симметричности у функции, заданной на границе, на пересечении с осью координат обращается в ноль первая производная по параметру y . Следовательно, граничные условия для них будут следующего вида:

$$\omega_1'|_{y=0} = \omega_1'|_{y=\pi/2} = \omega_2'|_{y=0} = \omega_2'|_{y=\pi/2}. \quad (4.3)$$

Отметим, что численная схема имеет первый порядок аппроксимации как по пространственным переменным, так и по времени, так как для приграничных узлов, шаблон которых пересекает L_0 , построить симметричные конечно-разностные выражения для производных по пространственным координатам невозможно.

Для расчета по схеме (4.2) необходимо знать перемещения во всех узлах из деформированной области, в том числе прифронтных. В то же время для узлов сетки из области, лежащей между



Фиг. 3.

поверхностью разрывов на последнем временном слое $\Sigma(t)$ и ее положением на позапрошлом временном слое $\Sigma(t - 2\Delta t)$ (см. фиг. 1), записать конечно-разностные выражения для второй производной по времени нельзя, так как соответствующие узлы с предыдущих временных слоев не попадают в деформированную область. С другой стороны, в прифронтной зоне имеем аналитическое решение (3.7), но оно справедливо лишь для достаточно малых времен. Будем считать, что перемещения в окрестности волнового фронта в произвольный момент времени описываются тем же рядом (3.7), но константы ω_{10} и ω_{20} входят в него в качестве неизвестных параметров. Таким образом, приближенное аналитическое решение представляет собой уравнение относительно перемещения и набора неизвестных величин – констант лучевого разложения. Эти уравнения, записанные для узлов, перемещения в которых могут быть вычислены по конечно-разностной формуле, и, в то же время, достаточно близких к поверхности разрывов, позволяют замкнуть систему.

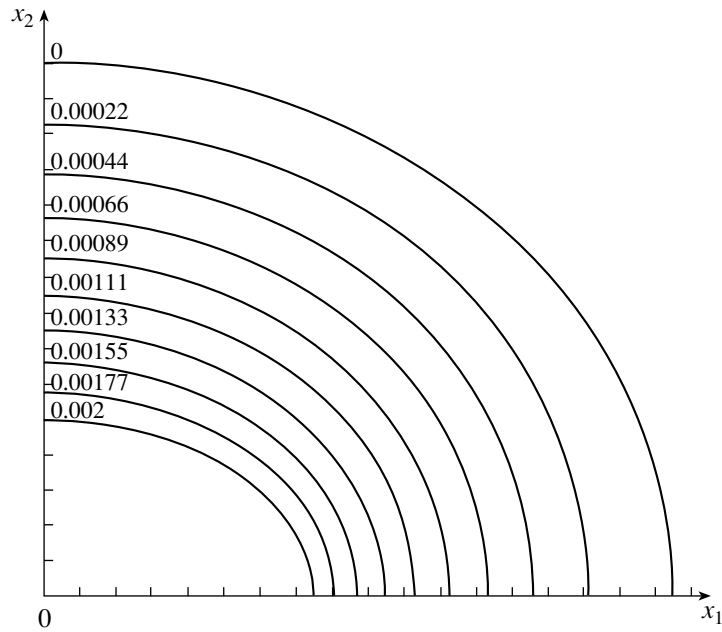
С этой целью рассмотрим отдельный узел сплайна, описывающего $\Sigma(t - 2\Delta t)$. Перемещения точек среды, совпадающих с рассматриваемыми узлами, можно получить путем интерполирования по соседним узлам сетки. Для интерполирования используем формулу Тейлора, считая, что разложение производится относительно ближайшей точки из деформированной области, для которой можно записать конечно-разностные уравнения (4.2). Входящие в формулу производные, как и раньше, аппроксимируем конечными разностями. С другой стороны, для рассматриваемых узлов можно записать уравнение (3.7), в котором ω_{10} , ω_{20} , $\delta\omega_{10}/\delta t$ зависят только от луча, а t_{Σ} для данной точки – константа. Поэтому имеем

$$\dot{u} = -\left(\omega_{10} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} t_{\Sigma}\right) - \omega_{20}(t - t_{\Sigma}), \quad (4.4)$$

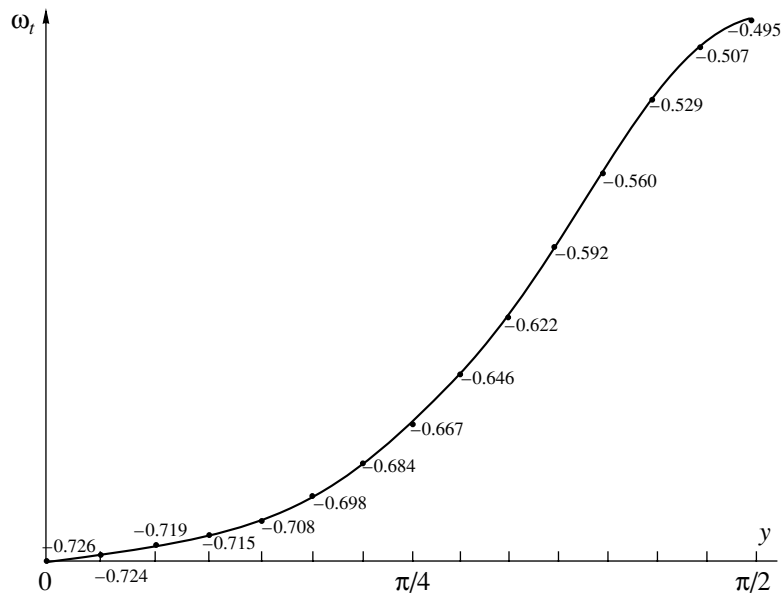
$$\ddot{u} = -\omega_{20}.$$

Полагая эти выражения уравнениями относительно ω_{10} и ω_{20} , вычисляем значения параметров для данного узла. Частные производные \dot{u} и \ddot{u} в (4.4) могут быть получены с помощью конечно-разностных формул (4.1). Положим, для удобства, на последнем временном слое $t = 0$, тогда $t_{\Sigma} = -2\Delta t$ и из (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= -\frac{u_{m,n}^k - u_{m,n}^{k-1}}{\Delta t} - 2\Delta t \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t} + 2\Delta t \omega_{20}, \\ \omega_{20} &= -\frac{u_{m,n}^k - 2u_{m,n}^{k-1} + u_{m,n}^{k-2}}{\Delta t^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$



Фиг. 4.

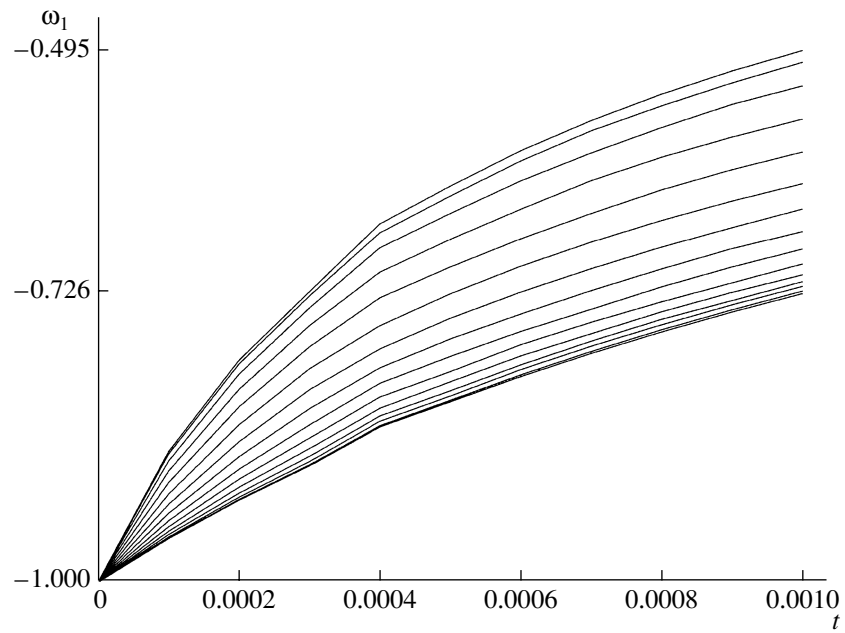


Фиг. 5.

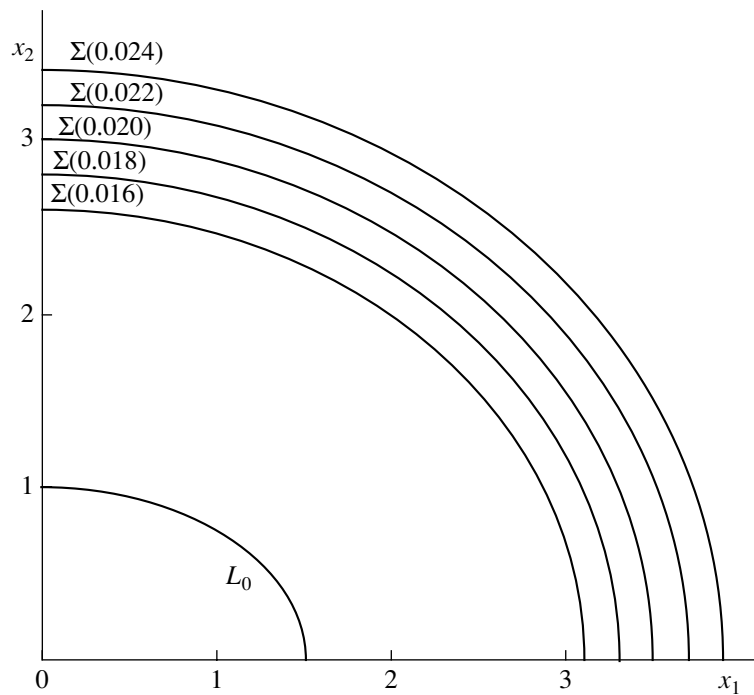
Для вычисления δ -производной в (4.5) используем конечно-разностное выражение

$$\frac{\delta \omega_1}{\delta t}(y, t) \approx \frac{\omega_1(y, t) - \omega_1(y, t - \Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.6)$$

Система нелинейных алгебраических уравнений, включающая конечно-разностные уравнения (4.2) для внутренних узлов деформированной области, и лучевые разложения для точек, совпадающих с узлами поверхности разрыва на позапрошлом временном слое, решается методом простой итерации. В качестве начального приближения для очередного слоя используются значения перемещений, полученные при подстановке в аналитическое решение параметров ω_1^{k-1} и ω_2^{k-1}



Фиг. 6.



Фиг. 7.

предыдущего слоя и времени $t = \Delta t$. За начальное приближение параметров разложения ω_1 и ω_2 принимаются $\omega_1^k \approx \omega_1^{k-1} + \frac{\delta\omega_{10}}{\delta t}\Delta t$ и $\omega_2^k \approx \omega_2^{k-1}$ соответственно; $\delta\omega_{10}/\delta t$ для слоя $t - \Delta t$ вычисляется по разностной формуле (4.6). Также с помощью лучевого разложения (3.7) вычисляются поля перемещений на первых двух временных слоях, необходимые для инициализации схемы. Константы лучевого разложения в этом случае вычисляются по граничному условию (2.1).

Таблица

$\Delta x_1 = \Delta x_2$	Δt	$t_1 = 0.0005$	$t_2 = 0.0006$	$t_3 = 0.0007$
		$\delta_{\text{ср}}$	$\delta_{\text{ср}}$	$\delta_{\text{ср}}$
0.02	0.0001	0.06	0.057	0.048
0.01	0.00005	0.028	0.023	0.028
0.005	0.000025	0.016	0.02	0.028

Заметим, что для вычисления перемещения по лучевой формуле необходимо сначала определить лучевые координаты s и u . В случае, когда узлы расположены достаточно близко к поверхности разрывов, можно считать, что луч – прямая, проходящая через узел и перпендикулярная фронту. Параметр u определяется из условия параллельности нормали к сплайну в соответствующей параметру точке и вектора, началом которого является рассматриваемый узел сетки, а концом – точка сплайна, соответствующая параметру. Вычисление u производится численно методом дихотомии. Зная u , можно вычислять значения параметров лучевого разложения с помощью интерполяционного полинома, а по ним определять значение s .

Получаемые в ходе решения константы лучевого разложения используются для определения на каждой итерации положения фронта ударной волны и его геометрических параметров, входящих в лучевой ряд. Таким образом, построена неявная вычислительная схема, на каждой итерации которой сначала пересчитываются внутренние узлы области, а затем сплайны, описывающие заданные на волновом фронте функции, и положение самого фронта. Каждая итерация завершается вычислением перемещений в узлах сетки прифронтной области, входящих в конечно-разностные уравнения.

По описанному выше алгоритму была разработана и отлажена программа, позволяющая вычислить на каждом временном шаге перемещения за фронтом ударной волны, положение фронта и константы лучевого разложения.

Далее приведем результаты численных расчетов. Параметры задачи выбраны следующим образом: $\alpha = 10$, $C = 10^3$ м/с, $v_0 = 1$ м/с, $a_0 = 1$ м/с², $a_1 = 1.5$ м, $a_2 = 1$ м. Шаги расчетной сетки составляют $\Delta t = 10^{-4}$ с, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.02$ м. На фиг. 3 показано распределение поля перемещений вдоль лучей в момент времени $t = 10^{-3}$ с в зависимости от расстояния вдоль луча. На фиг. 4 изображены изолинии функции перемещений в $(u(x_1, x_2, t))$ в области, охваченной волновым движением к моменту $t = 0.002$ с. На фиг. 5 изображен график изменения интенсивности волны вдоль волнового фронта в момент времени $t = 0.001$ с, а на фиг. 6 изменение ω_1 со временем для различных (фиксированных) лучей. Наконец, фиг. 7 иллюстрирует положение волновых фронтов на нескольких последних временных слоях ($t_1 = 0.016$ с, $t_2 = 0.08$ с, $t_3 = 0.02$ с, $t_4 = 0.022$ с) до момента $t = 0.0024$ с. Из представленных графиков видно, что более пологие участки фронта движутся быстрее, так что контур $\Sigma(t)$ стремится принять форму окружности.

Оценка сходимости и устойчивости построенной численной схемы, в силу ее нелинейности, является сложной задачей. Тем не менее, для малых времен качество численного решения можно проверить экспериментально с помощью приближенного аналитического решения. Для этого построим последовательность численных решений для одного момента времени, последовательно уменьшая шаг по пространственным и временной координатам вдвое. Оказалось, что среднее отклонение по узлам сетки

$$\delta_{\text{ср}} = \sum_{k, m, n} \delta_{m, n}^k / N, \quad \delta_{m, n}^k = \left| \frac{U_{m, n}^k - u_{m, n}^k}{u_{m, n}^k} \right| \quad (4.7)$$

численного $u_{m, n}^k$ решения от аналитического $U_{m, n}^k$ при этом уменьшается (см. таблицу). В (4.7) N – количество узлов в деформированной области.

Для проверки качества решения в случае достаточно больших времен, когда пользоваться лучевым разложением уже нельзя, оценивалось изменение относительной погрешности решения с уменьшением шага. Оказалось, что относительная погрешность для каждого узла, соответствующего какому-либо узлу предыдущего варианта решения, уменьшается. Так, для принятых вы-

ше параметров задачи и времени $t = 0.0011$ с при последовательном уменьшении шагов сетки вдвое максимальная относительная погрешность составила 15.9% и 5.8% соответственно.

Авторы выражают искреннюю благодарность А.А. Буренину за плодотворное обсуждение и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
2. Любимов А.Н., Русанов В.В. Течение газа около тупых тел. М.: Наука, 1970. Т. 1–2.
3. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
4. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.
5. Куликовский А.Г., Чугайкова А.П. Классические и неклассические разрывы и их структуры в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией. М.: МИРАН, 2007.
6. Уилкинс М.А. Расчет упругопластических течений // Вычисл. методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
7. Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение не одномерных задач динамики твердого деформируемого тела // Пробл. динамики упруго-пластических сред. Сер.: Механ. Новое в зарубежной литературе. М.: Мир, 1975. № 5. С. 39–84.
8. Куропатенко В.Ф. Методы расчета ударных волн // Дальневосточный матем. журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 45–59.
9. Зиновьев П.В., Рагозина В.Е., Буренин А.А. Выделение поверхностей разрывов лучевым методом в задачах динамики упругих сред // Фундаментальные и прикл. вопросы механ. Хабаровск: ХГТУ. 2003. С. 64–66.
10. Буренин А.А., Зиновьев П.В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Пробл. механ. Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 146–155.
11. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Rev. 1995. V. 48. № 1. P. 1–39.
12. Буренин А.А., Россихин Ю.А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов // Прикл. задачи механ. деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. С. 129–137.
13. Буренин А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный матем. сб. 1999. № 8. С. 49–72.
14. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
15. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // Дальневосточный матем. журнал. 2004. Т. 5. № 1. С. 100–109.
16. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964.
17. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
18. Буренин А.А., Рагозина В.Е. К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2008. № 2. С.
19. Буренин А.А., Россихин Ю.А. К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной // Прикл. механ. 1990. Т. 26. № 1. С. 103–108.