УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

С.В. Киселевская
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
Россия, 690000, Владивосток, Гоголя 41
E-mail: svetlana.kiselevskaya@vvsu.ru

Ключевые слова: уравнение Пуассона, функциональные пространства сигма следы

В задачах механики твёрдого тела всегда наблюдается концентрация напряжений в угловых (особых) точках границы, в частности, в вершинах трещин. Аналогичным образом дело обстоит и в гидродинамических задачах. Это приводит к сингулярности решения в особых точках. В такой ситуации обычно рассматривают так называемые энергетические решения, имеющие наиболее слабую сингулярность. В настоящей работе изучаются решения с сингулярностью произвольного порядка, относящиеся к классу неэнергетических решений.

Пусть S - единичная окружность в евклидовом двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. Введём полярные координаты $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Обозначим через S_R круговой сектор радиуса R с центром в точке $\mathcal{O}$ и раствора $\Phi \in (0, 2\pi]$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ ограниченную область Ω и пусть начало координат $\mathcal{O}$ принадлежит Ω. Будем считать, что при некотором $R_\circ > 0$ пересечение области Ω с кругом с центром в $\mathcal{O}$ и радиуса $2R_\circ$ совпадает с круговым сектором $S_{2R_\circ}$. Кроме того, будем считать, что граница области Ω класса C^∞ за исключением точки $\mathcal{O}$, которая по нашему предположению, является угловой точкой. Пусть $G_{\mathcal{O}} = \partial\Omega \backslash \mathcal{O}$. Рассматривается краевая задача.

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \ x \in \Omega, \\ u\big|_{\Gamma_{\mathcal{O}}} = 0, \ x \in G_{\mathcal{O}}, \\ \sigma u\big|_{\mathcal{O}} = \Psi(\varphi), \ \varphi \in [0, \Phi]. \end{cases}$$

Также изучается сингулярная эллиптическая краевая задача в области на конусе, содержащей его вершину – особую точку. Однако, используя определенное преобразование, она рассматривается сразу в области Ω на плоскости. Обратным преобразованием её можно трансформировать в краевую задачу в области на конусе.

Краевая задача имеет вид.

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), \ x \in \Omega, \\ u\big|_{G} = g(x), \ x \in G, \\ \sigma u\big|_{\mathcal{O}} = \Psi(\varphi), \ \varphi \in [0, \Phi]. \end{cases}$$

Для описанных выше областей определяются и изучаются новые функциональные пространства типа Фреше в ограниченной области с гладкой границей, за исключением угловой точки. Эти пространства характеризуются тем, что они содержат все гармонические функции, имеющие произвольные особенности в конечном числе фиксированных точек, а также они шире, чем пространства Соболева–Никольского–Бесова, а вне особой точки совпадают с последними. Вводится понятие сигма-следа в особой точке. Доказываются соответствующие прямые и обратные теоремы о σ-следах.

Основной результат состоит в доказательстве однозначной разрешимости поставленных сингулярных эллиптических краевых задач.

Список литературы

1. Катрахов В.В. Краевая задача для уравнения Пуассона с особенностями произвольного порядка в граничных точках.