Мальцевские чтения
Новосибирск (2007)
Тезисы докладов

Аксиоматизируемые и полные классы свободных частично упорядоченных полигонов

М. А. Первухин и А. А. Степанова

В работе рассмотрены вопросы аксиоматизируемости и полноты для классов частично упорядоченных полигонов, свободных над множествами и свободных над частично упорядоченными множествами. Напомним ряд определений.

Пусть S — частично упорядоченный моноид (чу моноид). *Левым частично упорядоченным S-полигоном* (или, просто, *чу полигоном*) (см.[1]) ${}_SA$ называется частично упорядоченное множество (чу множество) A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно и $a \leqslant a'$ влечет $sa \leqslant sa'$, а $s \leqslant t$ влечет $sa \leqslant ta$ для любых $a, a' \in A$ и $s, t \in S$. Заметим, что S можно рассматривать как чу полигон ${}_SS$. Ясно, что совокупность чу полигонов (для фиксированного чу моноида S) вместе с гомоморфизмами чу полигонов образует категорию, которую обозначим через $S - POSET$; кроме того, существуют забывающие функторы из категории $S - POSET$ в категорию SET множеств и в категорию $POSET$ чу множеств. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — категории и $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — функтор. Объект a категории $\mathcal{A}$ называется свободным (слева) над объектом b категории $\mathcal{B}$ (по отношению к функтору $\mathcal{F}$) (см.[2]), если существует морфизм $u : b \to \mathcal{F}(a)$ такой, что для любого объекта a' категории $\mathcal{A}$ и любого морфизма $u' : b \to \mathcal{F}(a')$ существует единственный морфизм $v : a \to a'$ такой, что $u' = \mathcal{F}(v) \circ u$.

Чу полигон ${}_SA$ называется *свободным над множеством* (*чу множеством*) X, если ${}_SA$ как объект категории $S - POSET$ свободен над X, как объектом категории SET ($POSET$). Через $\mathcal{F}r^{\leqslant}$, $po\mathcal{F}r^{\leqslant}$, $\mathcal{P}^{\leqslant}$, $\mathcal{SF}^{\leqslant}$ обозначим соответственно класс свободных над множествами, свободных над чу множествами, проективных, сильно плоских чу полигонов. Известно (см. [3]), что чу полигон ${}_SF$ свободен над множеством X тогда и только тогда, когда ${}_SF \cong \coprod_{x \in X} {}_SSx$, где ${}_SSx$ — копии чу полигона ${}_SS$ и элементы множеств Sx и Sy несравнимы для любых различных $x, y \in X$. Следующее утверждение описывает чу полигоны, свободные над чу множествами.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта ведущих научных школ РФ (грант НШ-9004.2006.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект N 05-01-00411) и гранта ведущих научных школ РФ (грант НШ-9004.2006.1).

Утверждение 1. *Чу полигон $_SF$ свободен над чу множеством X тогда и только тогда, когда $_SF \cong \coprod_{x\in X} {_S}Sx$, где $_SSx$ — копии чу полигона $_SS$, причем для любых $s,t \in S$ и $x,y \in X$*

$$s_x \leqslant t_y \Leftrightarrow s \leqslant t \text{ и } x \leqslant y,$$

где s_x, t_y — копии элементов $s,t \in S$ в Sx и Sy соответственно.

Для формулировки следующих результатов напомним некоторые понятия. Отношение $\mathcal{H}$ на моноиде S определяется стандартно:

$$x\mathcal{H}y \Leftrightarrow xS = yS \text{ и } Sx = Sy.$$

Моноид S называется локальным, если $S\backslash\mathcal{H}_1$ является идеалом S. Очевидно, $\mathcal{H}_1$ — группа. Группа $\mathcal{H}_1$ называется группой конечного правого индекса в моноиде S, если в S найдутся элементы $a_1,\ldots,a_n$ такие, что $S = \bigcup_{i=1}^n a_i\mathcal{H}_1$. В [4] охарактеризованы моноиды S с аксиоматизируемым классом свободных полигонов при условии, что моноид S имеет конечное число различных правых идеалов. Следующая теорема дает аналогичную характеризацию чу моноидов с аксиоматизируемыми классами $\mathcal{F}r^{\leqslant}$ и $po\mathcal{F}r^{\leqslant}$.

Теорема. *Пусть S — чу моноид с конечным числом различных правых идеалов. Тогда*

1) класс $\mathcal{F}r^{\leqslant}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{P}^{\leqslant}$ аксиоматизируем, S — локальный моноид и $\mathcal{H}_1$ — группа конечного правого индекса в моноиде S.

2) класс $po\mathcal{F}r^{\leqslant}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любых $s,t \in S$ множество $r^{\leqslant}(s,t) = \{a \in S \mid sa \leqslant ta\}$ либо пусто, либо конечно порождено как правый идеал моноида S; множество $R(s,t) = \{< a,b >\mid sa = tb\}$ либо пусто, либо конечно порождено как подполигон правого полигона $_S(S{\times}S)$; $\mathcal{SF}^{\leqslant} = \mathcal{P}^{\leqslant}$; S — локальный моноид и $\mathcal{H}_1$ — группа конечного правого индекса в моноиде S.

Следующие утверждения касаются вопросов полноты классов $\mathcal{F}r^{\leqslant}$, и $po\mathcal{F}r^{\leqslant}$.

Утверждение 2. *Пусть S — чу моноид такой, что класс $\mathcal{F}r^{\leqslant}$ аксиоматизируем. Тогда класс $\mathcal{F}r^{\leqslant}$ полон.*

Утверждение 3. *Не существует моноида S такого, что аксиоматизируемый класс $po\mathcal{F}r^{\leqslant}$ полон.*

Литература

1. S.M. Fakhruddin, On the Category of S-posets, Acta Sci. Math. (Szeged), 52 (1988), 85-92.

2. П. Габриэль, М.Цисман. Категории частных и теория гомологий. М.: Мир, 1971

3. X. Shi, Z. Liu, F. Wang, S. Bulman-Fleming, Indecomposable, projective and flat S-posets, Comm. Algebra, 33 (2005), 235-251.

4. А.А. Степанова, Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S-полигонов, Алгебра и логика, 30 (1991), 583-594.

E-mail: `mike38@mail.ru`

E-mail: `stepltd@mail.primorye.ru`