УДК 510.67:512.56

М. А. Первухин

О РЕГУЛЯРНЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛИГОНАХ*

Понятие регулярного частично упорядоченного полигона является обобщением понятия регулярного полигона. В работах Е. В. Овчинниковой и А. А. Степановой были исследованы моноиды, над которыми класс регулярных полигонов аксиоматизируем, полон, модельно полон. В данной работе аналогичные вопросы рассматриваются для частично упорядоченных моноидов и частично упорядоченных полигонов. А именно, описываются частично упорядоченные моноиды с аксиоматизируемым классом частично упорядоченных регулярных полигонов. Кроме того, доказывается, что не существует частично упорядоченных моноидов, над которыми класс частично упорядоченных регулярных полигонов был бы полон или модельно полон.

Ключевые слова: частично упорядоченные моноиды, частично упорядоченные полигоны, регулярные частично упорядоченные полигоны, модель, аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота.

Предварительные сведения

Напомним некоторые определения из теории частично упорядоченных полигонов.

Частично упорядоченным моноидом (*ЧУ-моноидом*) называется моноид S, на котором введен частичный порядок $\leqslant$ так, что если $s, t, u \in S$ и $s \leqslant t$, то $us \leqslant ut$ и $su \leqslant tu$. Всюду под S будем понимать моноид или ЧУ-моноид, что будет ясно из контекста или отдельно оговорено. Пусть S — ЧУ-моноид. Структура $\langle A; L_S^{\leqslant} \rangle$ языка $L_S^{\leqslant} = \{s \mid s \in S\} \bigcup \{\leqslant\}$ называется *левым частично упорядоченным S-полигоном* (*или, просто, левым ЧУ-полигоном*), если для любых $a, a' \in A$ и $s, t \in S$

(1) $(st)a = s(ta)$;

(2) $1a = a$;

(3) $a \leqslant a'$ влечет $sa \leqslant sa'$;

(4) $s \leqslant t$ влечет $sa \leqslant ta$.

Везде далее, если не оговорено противное, под ЧУ-полигоном будем понимать левый ЧУ-полигон. ЧУ-полигон $\langle A; L_S^{\leqslant} \rangle$ будем обозначать $_SA$. Заметим, что ЧУ-моноид S можно рассматривать как ЧУ-полигон $_SS$.

Гомоморфизмом f ЧУ-полигонов $_SA$ и $_SB$ называется отображение $f : {_SA} \to {_SB}$ такое, что $f(sa) = sf(a)$ и неравенство $a \leqslant b$ влечет $f(a) \leqslant f(b)$ для любых $a, b \in A$ и $s \in S$. Подструктура ЧУ-полигона $_SA$ называется *ЧУ-подполигоном* ЧУ-полигона $_SA$. *Конечно порожденным ЧУ-подполигоном* ЧУ-полигона $_SA$ называется ЧУ-подполигон вида $_S(Sa_1 \cup \ldots \cup Sa_n)$, где $a_1, \ldots, a_n \in A$. *Циклическим ЧУ-подполигоном* ЧУ-полигона $_SA$ называется ЧУ-полигон вида $_SSa$, где $a \in A$. *Копроизведением* ЧУ-полигонов $_SA_i$ $(i \in I)$ называется их дизъюнктное объединение, которое будем обозначать через $\coprod_{i \in I} {_SA_i}$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00336-а) и ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810.2008.1).

Класс K алгебраических систем называется аксиоматизируемым, если существуют язык L и такое множество предложений Z языка L, что для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in K \Longleftrightarrow (\text{язык } \mathcal{A} \text{ равен } L \text{ и } \mathcal{A} \models \Phi \text{ для всех } \Phi \in Z). \tag{1}$$

Если для класса K выполняется (1), то L называется языком K, а множество Z называется множеством аксиом для K (обозначаем $K = K_L(Z)$). Если все системы класса K имеют язык L, то множество предложений языка L, истинных на всех системах из K, называется элементарной теорией класса K или просто теорией класса K и обозначается через $Th(K)$. Если $K = \{\mathcal{A}\}$, то вместо $Th(K)$ будем писать $Th(\mathcal{A})$.

Теорема 1 [2]. *Класс K алгебраических систем языка L аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

Если K — класс алгебраических систем языка L, то через K^∞ обозначим класс бесконечных систем из K. Класс K называется полным (модельно полным), если теория $Th(K^\infty)$ класса K^∞ полна (модельно полна).

Утверждение 1. *Пусть S — ЧУ-моноид. Тогда для любых $e, f \in S$ таких, что $e^2 = e$, $f^2 = f$ из $eS \subseteq fS$ следует $e = fe$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим $eS \subseteq fS$. Тогда $e = fk$ для некоторого $k \in S$. Домножим предыдущее равенство на f слева. Получим $f^2k = fe = e$.

Предложение 1. *Если $e, f \in R$, $e^2 = e$ и $f^2 = f$, то*

1) *$eR = fR \Longleftrightarrow eS = fS$;*

2) *$eR \subset fR \Longleftrightarrow eS \subset fS$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e, f \in R$, $e^2 = e$ и $f^2 = f$.

Докажем 1). Если $eR = fR$, то $e = ee \in eR = fR \subseteq fS$ и $eS \subseteq fS$; аналогично, $fS \subseteq eS$, т. е. $eS = fS$. Если $eS = fS$, то $e = fe \in fR$ и $eR \subseteq fR$; аналогично, $fR \subseteq eR$, т. е. $eR = fR$.

Докажем 2). Если $eR \subset fR$, то $e = ee \in eR \subset fR \subseteq fS$ и $eS \subseteq fS$. Заметим, что равенства быть не может (иначе в силу п. 1 было бы $eR = fR$). Таким образом, $eS \subset fS$. Если $eS \subset fS$, то $e = fe \in fR$ и $eR \subseteq fR$. Равенство также не возможно. Поэтому $eR \subset fR$.

§ 1. Регулярные ЧУ-полигоны

Пусть ${}_SA$ — ЧУ-полигон. Элемент $a \in A$ называется *регулярным*, если существует гомоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ такой, что $\varphi(a)a = a$. ЧУ-полигон ${}_SA$ называется регулярным, если все его элементы регулярны [3]. Класс регулярных ЧУ-полигонов обозначим $\mathcal{R}^<$.

Предложение 2 [3]. *Пусть ${}_SA$ — ЧУ-полигон и $a \in A$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *a — регулярный элемент;*

2) *существует идемпотент $e \in S$ такой, что ${}_SSa \cong {}_SSe$.*

Предложение 3 . *Пусть ${}_SA$ — ЧУ-полигон, $a \in A$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *a — регулярный элемент;*

2) *существуют идемпотент $e \in S$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\psi : {}_SSa \longrightarrow {}_SSe$ такие, что $\psi(a) = e$;*

3) *существует идемпотент $e \in S$ такой, что ЧУ-полигоны ${}_SSa$ и ${}_SSe$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1)$\Rightarrow$ 2). Пусть $a \in A$ — регулярный элемент, $\varphi : {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ — гомоморфизм ЧУ-полигонов такой, что $\varphi(a)a = a$. Пусть $e = \varphi(a)$. Тогда $e = \varphi(a) = \varphi(\varphi(a)a) = \varphi(a)\varphi(a) = e^2$ и $ea = \varphi(a)a = a$. Кроме того, если $sa \leqslant ta$, то $se = s\varphi(a) = \varphi(sa) \leqslant \varphi(ta) = t\varphi(a) = te$ для любых $s, t \in S$. Тогда отображение $\psi : {}_SSa \longrightarrow {}_SSe$ такое, что $\psi(sa) = se$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом ЧУ-полигонов.

Импликация 2)$\Rightarrow$3) очевидна.

3)$\Rightarrow$1). Следует из предложения 2.

Следствие 1. *Следующие условия для ЧУ-полигона ${}_SA$ эквивалентны:*

1) *ЧУ-полигон ${}_SA$ регулярен;*

2) *для любого $a \in A$ существуют идемпотент $e \in S$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\psi : {}_SSa \longrightarrow {}_SSe$ такие, что $\psi(a) = e$;*

3) *для любого $a \in A$ существует идемпотент $e \in S$ такой, что ЧУ-полигоны ${}_SSa$ и ${}_SSe$ изоморфны.*

Пусть в ЧУ-полигоне ${}_SA$ существует регулярный ЧУ-подполигон. Заметим, что объединение всех регулярных ЧУ-подполигонов ЧУ-полигона ${}_SA$ есть регулярный ЧУ-подполигон, который называется регулярным центром ЧУ-полигона ${}_SA$ и обозначается через $R({}_SA)$. Вместо $R({}_SS)$ будем писать ${}_SR$. Подполугруппа R ЧУ-моноида S называется регулярным центром ЧУ-моноида S. Всюду в дальнейшем предполагается $R \neq \varnothing$.

Доказательство следующей теоремы является модификацией доказательства теоремы об аксиоматизируемости класса регулярных S-полигонов [4].

Теорема 2. *Класс $\mathcal{R}^<$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда*

1) *полугруппа R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами;*

2) *для любых $n \geqslant 1$, $s_i, t_i \in S$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ множество $\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_ix \leqslant t_ix\}$ пусто или конечно-порождено как правый идеал полугруппы R.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть класс $\mathcal{R}^<$ аксиоматизируем. Предположим, что п. 1 не выполняется. Это означает, что существует бесконечно убывающая цепь главных правых идеалов:

$$f_0R \supset f_1R \supset \ldots \supset f_nR \supset \ldots,$$

где $f_n \in R$, $f_n^2 = f_n$ $(n \geqslant 0)$. По предложению 1 верно

$$f_0S \supset f_1S \supset \ldots \supset f_nS \supset \ldots.$$

Для любых n, m, $0 \leqslant n \leqslant m$, из включения $f_nS \supseteq f_mS$ следует равенство $f_nf_m = f_m$. Пусть $\bar{f} = (f_n)_{n \in \omega} \in R^\omega$ и D — произвольный неглавный ультрафильтр на ω. Тогда в ${}_SR^\omega/D$ для любого $n \geqslant 0$ верно равенство $f_n \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$. Из аксиоматизируемости класса $\mathcal{R}^<$ по теореме 1 имеем ${}_SR^\omega/D \in \mathcal{R}^<$. По предложению 3 существуют идемпотент $e \in R$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_S(S \cdot \bar{f}/D) \longrightarrow {}_SSe$ такие, что $\varphi(\bar{f}/D) = e$. Тогда $e \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$. Для любого $n \geqslant 0$ равенство $f_n \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$ влечет равенство $f_ne = e$. Следовательно, существует $m \geqslant 0$ такой, что $f_m = ef_m \in eS \subseteq f_nS$ для любых $n \geqslant 1$, что противоречит условию $f_{m+1}S \subset f_mS$. Таким образом, п. 1 доказан.

Предположим, что п. 2 не выполняется. Тогда существуют $n \geqslant 1$, $s_i, t_i \in S$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, для которых множество $X = \{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_ix \leqslant t_ix\}$ не пусто и не конечно-порождено как правый идеал R. Значит, найдутся бесконечный ординал γ и $x_\tau \in X$ $(\tau < \gamma)$, такие что $X = \cup\{x_\tau R \mid \tau < \gamma\}$ и $x_\beta R \not\subseteq \cup\{x_\tau R \mid \tau < \beta\}$ для любого $\beta < \gamma$. Пусть $\bar{x} = (x_\tau)_{\tau<\gamma} \in R^\gamma$ и D – ультрафильтр на γ такой, что $|Y| = \gamma$ для $Y \in D$. Из аксиоматизируемости класса $\mathcal{R}^<$ по теореме 1 получаем ${}_SR^\gamma/D \in \mathcal{R}^<$. По предложению 3 существуют идемпотент $e \in R$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_SS\bar{x}/D \longrightarrow {}_SSe$ такие, что $\varphi(\bar{x}/D) = e$. Поскольку $x_\tau \in X$ $(\tau < \gamma)$, имеем $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i\bar{x}/D \leqslant t_i\bar{x}/D$ и $e \in X$. Следовательно, $eR \subseteq \cup\{x_\tau R \mid \tau < \gamma\}$, т. е. $eR \subseteq x_{\tau_0}R$ для некоторого $\tau_0 < \gamma$. Так как $e = ee$, то $\bar{x}/D = e \cdot \bar{x}/D$. В частности, $x_\tau \in eR$ для некоторого $\tau > \tau_0$ и $x_\tau R \subseteq x_{\tau_0}R$. Получили противоречие. Таким образом, п. 2 доказан.

Достаточность. Пусть выполняются пп. 1,2 теоремы. Предположим, $n \geqslant 1$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in S^n$, $X_{\bar{s}\bar{t}} = \{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_ix \leqslant t_ix\}$. Покажем, что либо $X_{\bar{s}\bar{t}} = \varnothing$, либо $X_{\bar{s}\bar{t}} = \cup\{e_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ для некоторых $k \geqslant 1$ и идемпотентов $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Предположим, что $X_{\bar{s}\bar{t}} \neq \varnothing$. По условию теоремы существуют $k \geqslant 1$, $r_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, для которых $X_{\bar{s}\bar{t}} = \cup\{r_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Можно считать, что $r_iR \not\subseteq r_jR$ $(i \neq j)$. Зафиксируем i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Поскольку $r_i \in R$, по предложению 3 существуют идемпотент $e_i \in R$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_SSr_i \longrightarrow {}_SSe_i$ такие, что $\varphi(r_i) = e_i$. Тогда $e_ir_i = r_i$. Поскольку $r_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$, имеем $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigcup\{r_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$, т. е. $e_i = r_js$ для некоторых $j, 1 \leqslant j \leqslant k$, и $s \in R$. Следовательно, $r_i = e_ir_i = r_jsr_i \in r_jR$. В силу выбора элементов r_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ это означает, что $r_i = r_j$. Так как $r_i = e_ir_i$, то $r_i \in e_iR \subseteq e_iS$. Ввиду $e_i = r_is$ имеем $e_i \in r_iS$. Следовательно, $r_iS = e_iS$. Согласно утверждению 1 $r_iR = e_iR$. Таким образом, $X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigcup\{e_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$, где $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$.

Определим множество формул Γ следующим образом: для любых $n \geqslant 1$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in S^n$

$$\neg\,\exists\, x \bigwedge_{i=1}^{n} s_ix \leqslant t_ix \ \in \Gamma, \quad \text{если } {}_SR \models \neg\,\exists\, x(x \in X_{\bar{s}\bar{t}});$$

$$\forall\, x\, \Bigl(\bigwedge_{i=1}^{n} s_ix \leqslant t_ix \longrightarrow \bigvee_{j=1}^{k} x = e_jx\Bigr) \ \in \Gamma, \quad \text{если } {}_SR \models \exists\, x(x \in X_{\bar{s}\bar{t}}),$$

где $X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigl\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_ix \leqslant t_ix\bigr\} = \bigcup\bigl\{e_jR \mid 1 \leqslant j \leqslant k\bigr\}$, $e_j^2 = e_j \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Покажем, что

$${}_SA \in \mathcal{R}^< \Longleftrightarrow {}_SA \models \Gamma.$$

Пусть ${}_SA \in \mathcal{R}^<$. Предположим, что ${}_SA \models \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_ia \leqslant t_ia$ для некоторого $a \in A$. По следствию 1 существуют идемпотент $f \in R$ и изоморфизм ЧУ-полигонов $\varphi : {}_SSa \longrightarrow$

${}_S Sf$ такие, что $\varphi(a) = f$. Тогда $f \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Следовательно, $X_{\bar{s}\bar{t}} \neq \varnothing$. Пусть $X_{\bar{s}\bar{t}} = \cup\{e_j R \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$, $e_j^2 = e_j \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Тогда ${}_S R \models \bigvee_{j=1}^{k} e_j f = f$ и ${}_S A \models \bigvee_{j=1}^{k} e_j a = a$.

Пусть ${}_S A \models \Gamma$, $a \in A$. Докажем, что ЧУ-полигоны ${}_S Sa$ и ${}_S Se$ изоморфны для некоторого идемпотента e из R. Ясно что $a \leqslant a$. Поскольку ${}_S A \models \Gamma$, имеем ${}_S R \models \exists x(x \leqslant x)$ и $a = fa$ для некоторого идемпотента $f \in R$. Пусть $\{f_\tau \mid \tau < \gamma\} = \{f \mid f^2 = f,\ fa = a,\ f \in R\}$. Индукцией по γ покажем, что существует $\gamma_0 < \gamma$ такой, что

$$f_{\gamma_0} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}.$$

Пусть γ — предельный ординал, $\tau_0 < \gamma$. По предположению индукции существует $\beta_0 < \tau_0$, для которого $f_{\beta_0} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \tau_0\}$. Если $f_{\beta_0} S \neq \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}$, то существуют β_1, τ_1, $\beta_1 < \tau_1 < \gamma$, такие что

$$f_{\beta_0} S \supset f_{\beta_1} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \tau_1\}$$

и т. д. Так как для любого $n \geqslant 0$ выполняется $f_{\beta_n} S \supset f_{\beta_{n+1}} S$, то в силу п. 2 утверждения 1 верно $f_{\beta_n} R \supset f_{\beta_{n+1}} R$. По условию теоремы убывающая цепь идеалов $f_{\beta_0} R \supset f_{\beta_1} R \supset \ldots \supset f_{\beta_n} R \supset \ldots$ обрывается. По п. 2 утверждения 1 обрывается также и убывающая цепь идеалов $f_{\beta_0} S \supset f_{\beta_1} S \supset \ldots \supset f_{\beta_n} S \supset \ldots$, т. е. $f_{\beta_k} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}$ для некоторого $k \geqslant 0$.

Пусть γ — непредельный ординал и существует $\beta_0 < \gamma - 1$, такой что $f_{\beta_0} S = \cap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma - 1\}$. Тогда ${}_S A \models (a \leqslant f_{\beta_0} a) \wedge (f_{\beta_0} a \leqslant a) \wedge (a \leqslant f_{\gamma-1} a) \wedge (f_{\gamma-1} a \leqslant a)$. Поскольку ${}_S A \models \Gamma$, имеем ${}_S R \models \exists x((x \leqslant f_{\beta_0} x) \wedge (f_{\beta_0} x \leqslant x) \wedge (x \leqslant f_{\gamma-1} x) \wedge (f_{\gamma-1} x \leqslant x))$ и существует $f \in R$ такой, что $a = fa$, $f = f_{\beta_0} f$, $f = f_{\gamma-1} f$. Следовательно,

$$f = f_{\gamma_0}, \quad \gamma_0 < \gamma, \quad f_{\gamma_0} S \subseteq f_{\beta_0} S \cap f_{\gamma-1} S, \quad f_{\gamma_0} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}.$$

Положим $e = f_{\gamma_0}$. Тогда $ea = a$ и для любого идемпотента $g \in R$ из равенства $ga = a$ следует $eS \subseteq gS$, т. е. $e = ge$. Покажем, что отображение $\varphi : Sa \longrightarrow Se$ такое, что $\varphi(sa) = se$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом ЧУ-полигонов. Пусть $ra \leqslant ka$, $r, k \in S$. Поскольку ${}_S A \models \Gamma$, то существует идемпотент $g \in R$ такой, что $rg \leqslant kg$ и $ga = a$. Тогда $ge = e$ и $re \leqslant ke$. Пусть $re \leqslant ke$, где $r, k \in S$. Поскольку $ea = a$, получаем $ra \leqslant ka$. Таким образом, ЧУ-полигоны ${}_S Sa$ и ${}_S Se$ изоморфны, и ${}_S A \in \mathcal{R}^<$ ввиду произвольности выбора элемента a.

Теорема 3. *Не существует ЧУ-моноида, над которым класс $\mathcal{R}^<$ аксиоматизируем и полон.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что аксиоматизируемый класс $\mathcal{R}^<$ полон. Пусть $e \in R$, $I = \{\langle i, j\rangle \mid i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}\}$, ${}_S Se_{ij}$ — копии ЧУ-полигона ${}_S Se$, $se_{ij} \in Se_{ij}$ — копии элемента $se \in Se$ в Se_{ij}. На множестве $\coprod_{\langle i,j\rangle \in I} {}_S Se_{ij}$ зададим отношение:

$$se_{ij} \leqslant te_{kl} \Longleftrightarrow se \leqslant te, \quad i \leqslant k \ \text{ и } \ 2^{k-i}(j-1) + 1 \leqslant l \leqslant 2^{k-i} j$$

для любых $se_{ij} \in Se_{ij}$, $se_{kl} \in Se_{kl}$, $\langle i, j\rangle, \langle k, l\rangle \in I$. Легко проверить, что данное отношение является частичным порядком. ЧУ-полигон $\coprod_{\langle i,j\rangle \in I} {}_S Se_{ij}$ с порядком $\leqslant$ обозначим через ${}_SA$. Через ${}_SB$ обозначим $\coprod_{\langle i,j\rangle\in I} {}_SSe_{ij}$, где элементы из разных копий ЧУ-полигона ${}_SSe$ несравнимы. По определению регулярного ЧУ-полигона ЧУ-полигоны ${}_SA$ и ${}_SB$ регулярны. Пусть

$$\Phi \rightleftharpoons \forall\, x(x = ex \to \exists\, y_1 \exists\, y_2(y_1 = ey_1 \wedge y_2 = ey_2 \wedge x < y_1 \wedge x < y_2 \wedge \neg\, \exists\, z(y_1 \leqslant z \wedge y_2 \leqslant z))).$$

Заметим, что ${}_SA \models \Phi$. Действительно, пусть $ese_{ij} \in A$. По определению порядка для элементов $ese_{i+1,2j-1}, ese_{i+1,2j}$ ЧУ-полигона ${}_SA$ справедливы неравенства $ese_{ij} < ese_{i+1,2j-1}$ и $ese_{ij} < ese_{i+1,2j}$. Предположим, что $ese_{i+1,2j-1} < te_{kl}$ и $ese_{i+1,2j} < te_{kl}$ для некоторого $te_{kl} \in {}_SA$. Тогда $ese \leqslant te$, $i+1 \leqslant k$, $2^{k-i-1}(2j-1-1)+1 \leqslant l \leqslant 2^{k-i-1}(2j-1)$ и $2^{k-i-1}(2j-1)+1 \leqslant l \leqslant 2^{k-i-1}(2j)$. Последние два неравенства не имеют общих решений. Таким образом, ${}_SA \models \Phi$. Покажем, что ${}_SB \not\models \Phi$. Предположим, что ${}_SB \models \Phi$. Тогда $e_{11} < ese_{ij}$, $e_{11} < ete_{kl}$ для некоторых $\langle i,j\rangle, \langle k,l\rangle \in I$ и $s,t \in S$, причем не существует в ${}_SB$ элемента, который был бы одновременно больше либо равен элементов ese_{ij}, ete_{kl}. Следовательно, по построению ${}_SB$, имеем $\langle i,j\rangle = \langle k,l\rangle = \langle 1,1\rangle$, $e < ese$ и $e < ete$. Умножим первое неравенство справа на t, а второе слева на s. Тогда $et \leqslant eset$ и $se \leqslant sete$, т. е. $ete \leqslant esete$ и $ese \leqslant esete$. Противоречие. Следовательно, не верно, что ${}_SA \equiv {}_SB$. Поэтому класс $\mathcal{R}^<$ не полон.

Из предыдущей теоремы и замкнутости класса $\mathcal{R}^<$ относительно копроизведений получаем

Следствие 2. *Не существует ЧУ-моноида, над которым класс $\mathcal{R}^<$ аксиоматизируем и модельно полон.*

Список литературы

1. *Первухин М. А., Степанова А. А.* Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов частично упорядоченных полигонов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 1. С. 90–121.

2. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.

3. *Shi X., Liu Z., Wang F., Bulman-Fleming S.* Indecomposable, Projective and Flat S-posets // Comm. Algebra. 2005. Vol. 33. P. 235–251.

4. *Михалев А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А. и др.* Теоретико-модельные свойства регулярных S-полигонов // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 107–157.

Материал поступил в редколлегию 05.06.2009

Адрес автора

ПЕРВУХИН Михаил Александрович

РОССИЯ, 630090, Владивосток

ул. Гоголя, 41, а. 1602

Владивостокский государственный

университет экономики и сервиса

e-mail: pervukhinMA@yandex.ru