Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Российская академия наук

Правительство Хабаровского края

ФГБОУ ВО Комсомольский-на-Амуре государственный университет

ФГАОУ ВО Дальневосточный федеральный университет

ФГБОУ ВО Амурский государственный университет

ФГБУН Хабаровский Федеральный исследовательский центр ДВО РАН

ФГБУН Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

ФГБУН Институт прикладной математики» ДВО РАН

Вычислительный центр ФГБУН ХФИЦ ДВО РАН

Институт машиноведения и металлургии ФГБУН ХФИЦ ДВО РАН

Дальневосточный центр математических исследований ФГАОУ ВО ДВФУ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Материалы III научной конференции с международным участием

(г.Комсомольск-на-Амуре, 7-11 октября 2024г.)

Комсомольск-на-Амуре

Комсомольский-на-Амуре государственный университет

2024

УДК: 539.37+539.214
Бегун Александра Сергеевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, доцент кафедры Математики и моделирования Владивостокского государственного университета.
Begun Aleksandra Sergeevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics and Modeling, Vladivostok State University

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ВЯЗКОУПРУГОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ
ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF CREEP OF A VISCOELASTIC CYLINDRICAL LAYER

Аннотация. С помощью математической модели больших деформаций получены аналитические решения задач о деформировании вязкоупругого цилиндрического слоя. Рассмотрено деформирование вязкоупругого материала, помещенного в зазор между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями, при повороте одного из жестких цилиндров за счет приложенного к нему момента закручивания, в то время как другой цилиндр остается неподвижным. Получены аналитические формулы для перемещения, обратимых и необратимых деформаций, напряжений на всех этапах деформирования, включая остаточные деформации и напряжения при полной разгрузке.
Abstract. Using a mathematical model of large deformations, analytical solutions to problems on the deformation of a viscoelastic cylindrical layer are obtained. The deformation of a viscoelastic material placed in a gap between two rigid cylindrical surfaces is considered when one of the rigid cylinders rotates due to a torque applied to it, while the other cylinder remains stationary. Analytical formulas are obtained for displacement, reversible and irreversible deformations, stresses at all stages of deformation, including residual deformations and stresses during complete unloading.
Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, большие деформации.
Key words: viscoelasticity, creep, large strains.

Введение

Для авиационной, аэрокосмической, энергетической промышленности актуальными являются задачи определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций со сложными реологическими свойствами. В большинстве исследований рассматривается случай малых деформаций, а численные расчеты выполнены методом конечных элементов [1-3]. Однако, задачи, описывающие процессы ползучести, являются геометрически и физически нелинейными, что приводит к необходимости использовать модель больших деформаций. Поэтому проинтегрировать определяющие соотношения или предложить аналитические методы их решения удается в редких случаях.

Здесь представим новое аналитическое решение задачи неустановившейся ползучести о деформировании вязкоупругого цилиндрического слоя. Решение строится в рамках модели больших деформаций материалов [4]. Рассматривается случай, когда накопление необратимых деформаций связано только с ползучестью материала, а источник необратимых деформаций задается степенным законом ползучести Нортона.

Постановка краевой задачи

Пусть вязкоупругий материал, помещен в зазор между двумя жесткими цилиндрическими поверхностями (радиус внутренней $r = r_0$, внешней $-r = R$). Рассматривается случай деформирования материала при повороте внутреннего жесткого цилиндра за счет приложенного к нему момента закручивания, в то время как внешний цилиндр является неподвижным. На жестких поверхностях выполняется условие прилипания, тогда граничные условия зададим в виде

$$\vec{u}\,|_{r=R} = \vec{\upsilon}\,|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\varphi}\,|_{r=r_0} = \frac{c(t)}{r_0^2}. \tag{1}$$

Кинематика движения среды задается соотношениями

$$\begin{gathered} u_r = r(1-\cos\theta),\ u_\varphi = r\sin\theta,\ d_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial\theta}{\partial r},\ d_{rr} = -2d_{r\varphi}^2, \\ \upsilon_\varphi = r\frac{\partial\theta}{\partial t}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial^2\theta}{\partial r \partial t}, \quad r_{r\varphi} = \omega_{r\varphi} = -\frac{\partial\theta}{\partial t} - \varepsilon_{r\varphi} \end{gathered} \tag{2}$$

В рассматриваемом случае для скоростей необратимых деформаций получим:

$$\varepsilon_{r\varphi}^{\nu} = (-1)^n Bn2^{n-1}\left(\frac{c}{r^2}\right)^{n-1}, \quad \varepsilon_{rr}^{\nu} = \frac{(e_{rr} - e_{\varphi\varphi})\varepsilon_{r\varphi}^{\nu}}{2e_{r\varphi}}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\nu} = -\varepsilon_{rr}^{\nu}. \tag{3}$$

При задании напряжения сдвига на внутреннем цилиндре параметры $\varepsilon_{r\varphi}^{\nu}$, $\varepsilon_{r\varphi}$, $e_{r\varphi}$, $p_{r\varphi}$ будут известными, что позволяет найти угловую скорость и угол закручивания

$$\omega = \frac{\upsilon_{\varphi}}{r} = \frac{\dot{c}}{2\mu}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{(-1)^n Bn(2c)^{n-1}}{n-1}\left(\frac{1}{R^{2(n-1)}} - \frac{1}{r^{2(n-1)}}\right),$$

$$\theta = \frac{c}{2\mu}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{(-1)^n 2^{n-1} Bnc_1}{n-1}\left(\frac{1}{R^{2(n-1)}} - \frac{1}{r^{2(n-1)}}\right), \quad c_1 = \int_0^t c^{n-1} d\xi.$$

Для диагональных компонент обратимых и необратимых деформаций e_{rr}, p_{rr}, $e_{\varphi\varphi}$, $p_{\varphi\varphi}$ получаем систему уравнений

$$\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \frac{(p_{\varphi\varphi} - e_{r\varphi}^2)}{e_{r\varphi}} \varepsilon_{r\varphi}^p - 2p_{r\varphi}\varepsilon_{r\varphi}, \quad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p_{r\varphi}^2,$$
$$p_{\varphi\varphi} = -e_{\varphi\varphi} + 2e_{r\varphi}p_{r\varphi} + e_{r\varphi}^2/2, \qquad e_{rr} + e_{\varphi\varphi} = -e_{r\varphi}^2. \tag{4}$$

Для решения данной системы в аналитическом виде примем постоянную в законе ползучести Нортона $n = 3$. Сдвиговое напряжение на внутренней поверхности $r = r_0$ зададим так, что оно сначала линейно увеличивается по абсолютному значению с течением времени, потом поддерживается постоянным в течение времени $t_1 \le t \le t_2$, затем линейно уменьшается до нуля:

$$\tilde{n}(t) = \begin{cases} -at, & 0 \le t \le t_1 \\ -at_1, & t_1 \le t \le t_2 \\ -at_1 + b(t - t_2), & t_2 \le t \le t_3 \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, при увеличивающимся напряжении сдвига найдем

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{at}{r^2}, \quad e_{r\varphi} = -\frac{at}{2\mu r^2}, \quad \varepsilon_{r\varphi}^{\nu} = -\frac{4Bna^2t^2}{r^4},$$

$$p_{r\varphi} = \int_0^t \varepsilon_{r\varphi}^{\nu}(\xi)d\xi = -\frac{4Bna^2t^3}{3r^4}, \quad \omega = \frac{a}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) - 2Bn(at)^2\left(\frac{1}{R^4} - \frac{1}{r^4}\right),$$

$$\theta = \frac{at}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) - \frac{2}{3}Bna^2t^3\left(\frac{1}{R^4} - \frac{1}{r^4}\right),$$

$$p_{\varphi\varphi} = \frac{-a}{4D\mu^2 r^2}\left(\frac{aDt^2}{r^2} + e^{-\frac{aDt^2}{r^2}} - 1\right) + \frac{4}{3}\frac{Bna^3t^4}{\mu r^6},\quad p_{rr} = -p_{\varphi\varphi} - 2p_{r\varphi}^2, \tag{6}$$

$$e_{\varphi\varphi} = 2e_{r\varphi}p_{r\varphi} - p_{\varphi\varphi} + \frac{e_{r\varphi}^2}{2},\quad e_{rr} = -2e_{r\varphi}p_{r\varphi} + p_{\varphi\varphi} + \frac{3e_{r\varphi}^2}{2}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_0 + \frac{a}{2D\mu}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) - \frac{a^2t^2}{2\mu^2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_0^4}\right) + \frac{2}{9}\frac{Da^3t^4}{\mu^2}\left(\frac{1}{r^6} - \frac{1}{r_0^6}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2D^2\mu t^2}\left(e^{-\frac{aDt^2}{r^2}} - e^{-\frac{aDt^2}{r_0^2}}\right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} - 2\mu\left(e_{rr} - e_{\varphi\varphi}\right),\qquad \sigma_{zz} = \sigma_{rr} - 2\mu e_{rr} - 3\mu e_{r\varphi}^2.$$

Аналогичным образом находятся решения задачи при постоянном и уменьшающемся напряжении сдвига.

Заключение

В рамках модели больших деформаций с дифференциальными уравнениями изменения деформаций получено аналитические решения задач теории о деформировании в условиях ползучести вязкоупругого материала с расчетом упругого отклика при их разгрузке. Получены поля напряжений, деформаций, перемещений и скоростей.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственных заданий ИАПУ ДВО РАН (темы № FWFW-2021-0005).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Rimrott, F.P.J. Large strain creep of rotating cylinders / F.P.J., Rimrott, J.R. Luke // ZAMM-Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1961. - 41(12). – P. 485–500.

2. Bhatnagar, N.S.1975. Creep of thick-walled spherical vessels under internal pressure considering large strains / N.S. Bhatnagar, V.K. Arya // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. – 1975. – 6. – P. 1080.

3. Sakaki, T. Creep of a hollow sphere / T. Sakaki, T. Kuroki, K. Sugimoto // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. – 1990. – 57(2). – P. 276-281.

4. Буренин, А. А. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях / А. А. Буренин, Г. И. Быковцев, Л. В. Ковтанюк // Доклады Академии наук. – 1996. – Т. 347. – № 2. – С. 199-201.