

КОРРЕКТНОСТЬ МОДЕЛИ СЛОЖНОГО  
ТЕПЛООБМЕНА НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННОГО  
МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ТРЕТЬЕГО  
ПОРЯДКА

Г.В. ГРЕНКИН 

*Представлено* О.С. Розановой

**Abstract:** The paper deals with a system of equations that describes steady-state process of radiative-conductive heat transfer in a bounded domain with boundary conditions of specular and diffuse reflection of radiation and boundary conditions of the third kind for temperature. For the description of radiative energy field, the  $SP_3$  approximation of the simplified spherical harmonics method is used. We establish properties of existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem under constraints on coefficients in boundary conditions which are fulfilled over entire range of feasible physical data.

**Keywords:** radiative heat transfer,  $SP_3$  approximation,  $SP_N$  approximation, cross diffusion, unique solvability.

## 1 Введение

Повышение точности приближенного решения уравнения переноса излучения, совмещенного с уравнением теплопроводности, представляет практический интерес в связи с техническими и медицинскими приложениями [1, 2, 3, 4, 5]. Как показало сравнение [4, 5, 6, 7], использование

---

GRENKIN, G.V., CORRECTNESS OF A COMPLEX HEAT TRANSFER MODEL BASED ON THE SIMPLIFIED SPHERICAL HARMONICS METHOD OF THE THIRD ORDER.

© 2024 Гренкин Г.В.

Поступила 1 августа 2023 г., опубликована 28 мая 2024 г.

диффузионного приближения позволяет неплохо описать общую картину сложного теплообмена, в то время как для достижения точности, близкой к той, которую дают более трудоемкие методы Монте-Карло, потребуются приближения метода сферических гармоник хотя бы третьего порядка. Однако, с математической точки зрения, эти уравнения требуют дополнительного анализа корректности для более надежного применения их на практике.

В данной работе исследуется стационарная модель сложного теплообмена на основе  $SP_3$ -приближения уравнения переноса излучения. Ранее была доказана корректность  $SP_N$ -приближений без учета зависимости источников излучения от температуры [8], а также корректность нестационарной модели сложного теплообмена применительно к анализу обратных задач [9]. Стационарные модели сложного теплообмена изучались в рамках диффузионного ( $P_1$ ) приближения [10, 11, 12]. Отметим также работы [13, 14], в которых установлена корректность моделей теплообмена с полным уравнением переноса излучения, и работы [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21], посвященные теоретическому и численному анализу  $SP_N$ -приближений.

Важно установить корректность рассматриваемой модели для обоснования возможности использования стационарных уравнений для описания установившегося состояния полей температуры и энергии излучения. Существование решения краевой задачи для  $SP_3$ -модели сложного теплообмена доказывается таким же методом, как и при анализе  $P_1$ -модели [10]. Единственность решения получена при дополнительном условии на коэффициенты в граничных условиях, которые выполняются для всего диапазона допустимых физических данных.

## 2 Вывод варианта модели. Постановка задачи

Ранее в работе [9] были исследованы нестационарные уравнения  $SP_3$ -приближения вместе с уравнением теплопроводности и уравнением свободной конвекции, при этом граничные условия были записаны в общем виде, и относительно коэффициентов предполагалось условие строгого диагонального преобладания. В этом разделе мы выведем выражения для граничных коэффициентов и сформулируем условие, которому они должны удовлетворять, чтобы краевая задача гарантированно имела единственное решение. Здесь же мы установим, что это условие выполняется для всего диапазона допустимых физических данных в рамках варианта  $SP_3$ -модели с краевыми условиями зеркального и диффузного отражения с коэффициентами отражения, не зависящими от направления падающих лучей.

Установившийся процесс теплового излучения в среде, пропускающей, излучающей, поглощающей и рассеивающей тепловое излучение, заполняющей область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей  $\Gamma$ , которая излучает, поглощает, а

также зеркально и диффузно отражает тепловое излучение, моделируется уравнением [22]

$$\omega \cdot \nabla_x I(x, \omega) + \kappa I(x, \omega) = \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(\omega, \omega') I(x, \omega') d\omega' + \kappa_a I_b(T(x)) + \frac{q(x)}{4\pi}$$

с граничным условием

$$I(x, \omega) = \varepsilon(x) I_b(T_b(x)) + \rho_s(x) I(x, \omega_R) + \frac{\rho_d(x)}{\pi} \int_{\omega' \cdot \mathbf{n} > 0} I(x, \omega') \omega' \cdot \mathbf{n} d\omega', \quad \omega \cdot \mathbf{n} < 0, \quad x \in \Gamma.$$

Здесь  $I(x, \omega)$  – интенсивность излучения,  $T(x)$  – абсолютная температура. Направления излучения отождествляются с точками единичной сферы  $S = \{\omega \in \mathbb{R}^3: |\omega| = 1\}$ . Через  $I_b(T)$  обозначена интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре  $T$ :  $I_b(T) = \sigma n^2 T^4 / \pi$ , где  $n$  – показатель преломления,  $\sigma$  – постоянная Стефана–Больцмана. Через  $T_b(x)$  обозначена температура границы области,  $q(x)$  – объемная плотность изотропных источников излучения,  $\kappa_a$  – коэффициент поглощения,  $\kappa_s$  – коэффициент рассеяния,  $\kappa = \kappa_a + \kappa_s$ ,  $P(\omega, \omega')$  – фазовая функция рассеяния,  $\varepsilon$  – коэффициент излучения поверхности,  $\rho_s$  и  $\rho_d$  – коэффициенты зеркального и диффузного отражения,  $\varepsilon + \rho_s + \rho_d = 1$ ,  $\omega_R = \omega - 2(\omega \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  – направление отражения,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к  $\Gamma$ .

Поле температуры описывается уравнением теплопроводности:

$$-k\Delta T(x) = -\operatorname{div} \mathbf{q}_r(x) + F(x),$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $F(x)$  – объемная плотность источников тепла,  $\mathbf{q}_r$  – вектор плотности потока излучения, определяемый формулой  $\mathbf{q}_r(x) = \int_S I(x, \omega) \omega d\omega$ . На границе области поставим граничное условие III рода, выражающее закон Ньютона–Рихмана:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + h(x)(T(x) - T_b(x)) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где  $h(x)$  – коэффициент теплоотдачи.

Далее для вывода приближения упрощенного метода сферических гармоник рассмотрим аналогичное уравнение, описывающее перенос излучения в плоскопараллельном слое [11, 22, 23]:

$$\mu I_\tau(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' + (1 - c) I_b(T(\tau)), \quad (1)$$

с граничными условиями

$$I(0, \mu) = \varepsilon_1 I_b(T_{b1}) + \rho_1^s I(0, -\mu) + 2\rho_1^d \int_0^1 I(0, -\mu') \mu' d\mu', \quad \mu > 0, \quad (2)$$

$$I(\tau_0, \mu) = \varepsilon_2 I_b(T_{b2}) + \rho_2^s I(\tau_0, -\mu) + 2\rho_2^d \int_0^1 I(0, \mu') \mu' d\mu', \quad \mu < 0, \quad (3)$$

где  $I(\tau, \mu)$  – интенсивность излучения в точке с оптической координатой  $\tau \in [0, \tau_0]$  в направлении, составляющим с положительным направлением оси  $\tau$  угол с косинусом  $\mu \in [-1, 1]$ ,  $c = \kappa_s/\kappa$  – альбеда однократного рассеяния,  $p(\mu, \mu')$  – фазовая функция,  $T(\tau)$  – абсолютная температура.

Будем искать приближенное решение уравнения (1) в виде отрезка ряда Фурье по многочленам Лежандра  $P_k(\mu)$ , а также разложим по этим же функциям фазовую функцию рассеяния:

$$I(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^3 \phi_k(\tau) P_k(\mu) = \sum_{k=0}^3 \frac{2k+1}{4\pi} \tilde{\phi}_k(\tau) P_k(\mu), \quad p(\mu, \mu') = \sum_{k=0}^3 A_k P_k(\mu') P_k(\mu).$$

Подставив разложения функций  $I$  и  $p$  в уравнение (1) и в граничные условия (2), (3) и умножая полученные соотношения на  $P_l(\mu)$ ,  $l = 1, 3$ , а затем интегрируя по  $\mu$ , получим, следуя [22, 23], следующие уравнения относительно функций  $\phi_k(\tau)$ :

$$\frac{1}{3}\phi_1' + (1 - cA_0)\phi_0 = (1 - c)I_b(T(\tau)), \quad (4)$$

$$\phi_0' + \frac{2}{5}\phi_2' + (1 - cA_1/3)\phi_1 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{2}{3}\phi_1' + \frac{3}{7}\phi_3' + (1 - cA_2/5)\phi_2 = 0, \quad (6)$$

$$\frac{3}{5}\phi_2' + (1 - cA_3/7)\phi_3 = 0 \quad (7)$$

вместе с граничными условиями Маршака:

$$\sum_{k=0}^3 \left[ p_{kl} - (-1)^k \rho_1^s p_{kl} - 2(-1)^k \rho_1^d p_{0l} p_{1k} \right] \phi_k(0) = \varepsilon_1 I_b(T_{b1}) p_{0l}, \quad l = 1, 3,$$

$$\sum_{k=0}^3 \left[ p_{kl} - (-1)^k \rho_2^s p_{kl} - 2(-1)^k \rho_2^d p_{0l} p_{1k} \right] (-1)^k \phi_k(\tau_0) = \varepsilon_2 I_b(T_{b2}) p_{0l}, \quad l = 1, 3,$$

где  $p_{kl} = \int_0^1 P_k(\mu) P_l(\mu) d\mu$ .

Переходя к функциям  $\tilde{\phi}_k$ , получим из уравнений (5), (7) соотношения

$$\tilde{\phi}_1 = -\frac{1}{3}(1 - cA_1/3)^{-1} \tilde{\phi}_0' - \frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1} \tilde{\phi}_2',$$

$$\tilde{\phi}_3 = -\frac{3}{7}(1 - cA_3/7)^{-1} \tilde{\phi}_2',$$

отсюда после подстановки в (4), (6) получаем уравнения

$$-\frac{1}{3}(1 - cA_1/3)^{-1} \tilde{\phi}_0'' - \frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1} \tilde{\phi}_2'' + (1 - cA_0) \tilde{\phi}_0 = 4\pi(1 - c)I_b(T(\tau)),$$

$$-\frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1} \tilde{\phi}_0'' - \frac{4}{3}(1 - cA_1/3)^{-1} \tilde{\phi}_2'' - \frac{9}{7}(1 - cA_3/7)^{-1} \tilde{\phi}_2'' + 5(1 - cA_2/5) \tilde{\phi}_2 = 0$$

и граничные условия

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_0(0) - \frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_2(0) + \\
& + \frac{\varepsilon_1}{2(2 - \varepsilon_1)}(\tilde{\phi}_0(0) - 4\pi I_b(T_{b1})) + \frac{5\varepsilon_1}{8(2 - \varepsilon_1)}\tilde{\phi}_2(0) = 0, \\
& \frac{\rho_1^d}{4} \left( -\frac{1}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_0(0) - \frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_2(0) \right) + \frac{3}{7}(1 + \rho_1^s)(1 - cA_3/7)^{-1}\tilde{\phi}'_2(0) + \\
& + \frac{\varepsilon_1}{8}(\tilde{\phi}_0(0) - 4\pi I_b(T_{b1})) - \frac{5}{8} \left( 1 - \rho_1^s + \frac{1}{4}\rho_1^d \right) \tilde{\phi}_2(0) = 0, \\
& \frac{1}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_0(\tau_0) + \frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_2(\tau_0) + \frac{\varepsilon_2}{2(2 - \varepsilon_2)}(\tilde{\phi}_0(\tau_0) - 4\pi I_b(T_{b2})) + \\
& + \frac{5\varepsilon_2}{8(2 - \varepsilon_2)}\tilde{\phi}_2(\tau_0) = 0, \\
& \frac{\rho_2^d}{4} \left( \frac{1}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_0(\tau_0) + \frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_2(\tau_0) \right) - \frac{3}{7}(1 + \rho_2^s)(1 - cA_3/7)^{-1}\tilde{\phi}'_2(\tau_0) + \\
& + \frac{\varepsilon_2}{8}(\tilde{\phi}_0(\tau_0) - 4\pi I_b(T_{b2})) - \frac{5}{8} \left( 1 - \rho_2^s + \frac{1}{4}\rho_2^d \right) \tilde{\phi}_2(\tau_0) = 0.
\end{aligned}$$

из которых следуют условия

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_0(0) - \frac{4}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_2(0) - \frac{9}{7}(1 - cA_3/7)^{-1}\tilde{\phi}'_2(0) + \\
& + \frac{5\varepsilon_1}{8(2 - \varepsilon_1)}(\tilde{\phi}_0(0) - 4\pi I_b(T_{b1})) + \left( \frac{25\varepsilon_1}{8(2 - \varepsilon_1)} + \frac{75\rho_1^d}{16(1 + \rho_1^s)(2 - \varepsilon_1)} \right) \tilde{\phi}_2(0) = 0, \\
& \frac{2}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_0(\tau_0) + \frac{4}{3}(1 - cA_1/3)^{-1}\tilde{\phi}'_2(\tau_0) + \frac{9}{7}(1 - cA_3/7)^{-1}\tilde{\phi}'_2(\tau_0) + \\
& + \frac{5\varepsilon_2}{8(2 - \varepsilon_2)}(\tilde{\phi}_0(\tau_0) - 4\pi I_b(T_{b2})) + \left( \frac{25\varepsilon_2}{8(2 - \varepsilon_2)} + \frac{75\rho_2^d}{16(1 + \rho_2^s)(2 - \varepsilon_2)} \right) \tilde{\phi}_2(\tau_0) = 0.
\end{aligned}$$

Функция  $\tilde{\phi}_0 = 4\pi\phi_0$  аппроксимирует плотность энергии излучения  $\int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu$ , функция  $\tilde{\phi}_1 = 4\pi\phi_1/3$  аппроксимирует величину плотности потока излучения  $\int_{-1}^1 I(\tau, \mu)\mu d\mu$ , функции  $\phi_2$  и  $\phi_3$  не имеют простого физического смысла.

Чтобы теперь получить уравнения  $SP_3$ -приближения, заменим в уравнениях плоскопараллельного слоя одномерные дифференциальные операторы на многомерные и перейдем обратно от переменной  $\tau$  к переменной  $x$ . Будем иметь

$$\begin{aligned}
& -\alpha_{11}\Delta\tilde{\phi}_0 - \alpha_{12}\Delta\tilde{\phi}_2 + \kappa_a\tilde{\phi}_0 = 4\pi\kappa_a I_b(T(x)), \\
& -\alpha_{21}\Delta\tilde{\phi}_0 - \alpha_{22}\Delta\tilde{\phi}_2 + \tilde{\kappa}\tilde{\phi}_2 = 0, \\
& \alpha_{11}\frac{\partial\tilde{\phi}_0}{\partial n} + \alpha_{12}\frac{\partial\tilde{\phi}_2}{\partial n} + \frac{\varepsilon}{2(2 - \varepsilon)}(\tilde{\phi}_0 - 4\pi I_b(T_b)) + \frac{5\varepsilon}{8(2 - \varepsilon)}\tilde{\phi}_2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\alpha_{21} \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial n} + \alpha_{22} \frac{\partial \tilde{\phi}_2}{\partial n} + \frac{\varepsilon}{8(2-\varepsilon)} (\tilde{\phi}_0 - 4\pi I_b(T_b)) + \left( \frac{5\varepsilon}{8(2-\varepsilon)} + \frac{15\rho_d}{16(1+\rho_s)(2-\varepsilon)} \right) \tilde{\phi}_2 = 0.$$

Здесь  $\alpha_{11} = (3\kappa(1 - cA_1/3))^{-1}$ ,  $\alpha_{12} = 2\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{21} = 2\alpha_{11}/5$ ,  $\alpha_{22} = 4\alpha_{11}/5 + \frac{9}{35\kappa(1 - cA_3/7)}$ ,  $\tilde{\kappa} = \kappa(1 - cA_2/5)$ .

Дополним  $SP_3$ -приближение уравнения переноса излучения уравнением теплопроводности, введя нормированные величины  $\theta = T/T_{\max}$ ,  $\varphi = \tilde{\phi}_0/4\sigma n^2 T_{\max}^4$ ,  $\xi = \tilde{\phi}_2/4\sigma n^2 T_{\max}^4$ . Приходим к краевой задаче

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(\theta^4 - \varphi) = 0, \quad (8)$$

$$-\alpha_{11}\Delta\varphi - \alpha_{12}\Delta\xi + \kappa_a(\varphi - \theta^4) = 0, \quad (9)$$

$$-\alpha_{21}\Delta\varphi - \alpha_{22}\Delta\xi + \tilde{\kappa}\xi = 0, \quad (10)$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad (11)$$

$$\alpha_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \alpha_{12} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \gamma_{11}(\varphi - \theta_b^4) + \gamma_{12}\xi = 0, \quad (12)$$

$$\alpha_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \alpha_{22} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \gamma_{21}(\varphi - \theta_b^4) + \gamma_{22}\xi = 0. \quad (13)$$

Здесь  $a = k/\rho c_p$ ,  $b = 4\sigma n^2 T_{\max}^3/\rho c_p$ ,  $\beta = h/\rho c_p$ ,  $\theta_b = T_b/T_{\max}$ ,

$$\gamma_{11} = \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}, \quad \gamma_{12} = \frac{5\varepsilon}{8(2-\varepsilon)}, \quad \gamma_{21} = \frac{\varepsilon}{8(2-\varepsilon)}, \quad \gamma_{22} = \frac{5\varepsilon}{8(2-\varepsilon)} + \frac{15\rho_d}{16(1+\rho_s)(2-\varepsilon)}.$$

Чтобы избавиться от перекрестной диффузии в уравнениях, произведем преобразование координат  $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix}$ , где  $T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , выбрав, как и в [5, 9], числа  $\lambda_1, \lambda_2$  из условия равенства нулю внедиагональных коэффициентов в уравнениях. При этом матрицы коэффициентов уравнений  $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$  и граничных условий  $\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$  преобразуются, соответственно, к матрицам  $T\hat{\alpha}T^{-1}$  и  $T\hat{\gamma}T^{-1}$ . Приходим к соотношениям

$$-\alpha_1\Delta\psi_1 + \tilde{\kappa}\psi_1 = \tilde{\kappa}_s\varphi + \kappa_a\theta^4, \quad (14)$$

$$-\alpha_2\Delta\psi_2 + \tilde{\kappa}\psi_2 = \tilde{\kappa}_s\varphi + \kappa_a\theta^4, \quad (15)$$

$$\alpha_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} + \beta_{11}\psi_1 + \beta_{12}\psi_2 = \eta_1\theta_b^4, \quad (16)$$

$$\alpha_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} + \beta_{21}\psi_1 + \beta_{22}\psi_2 = \eta_2\theta_b^4, \quad (17)$$

где

$$\lambda_i = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{11}}{2\alpha_{21}} + \frac{(-1)^i}{2\alpha_{21}} \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad \omega_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \omega_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$\alpha_i = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2} + (-1)^i \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}} > 0,$$

$\tilde{\kappa}_s = \tilde{\kappa} - \kappa_a \geq 0$ ,  $\varphi = \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ ,  $\omega_{1,2} \geq 0$ ,  $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix}$ ,  
и поскольку

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = T\hat{\gamma}T^{-1} = \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} (\gamma_{11} + \lambda_1\gamma_{21})\lambda_2 - (\gamma_{12} + \lambda_1\gamma_{22}) & -(\gamma_{11} + \lambda_1\gamma_{21})\lambda_1 + (\gamma_{12} + \lambda_1\gamma_{22}) \\ (\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21})\lambda_2 - (\gamma_{12} + \lambda_2\gamma_{22}) & -(\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21})\lambda_1 + (\gamma_{12} + \lambda_2\gamma_{22}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то  $\eta_i = \beta_{i1} + \beta_{i2}$ .

Справедливы следующие свойства коэффициентов в граничных условиях при  $\varepsilon > 0$ .

- (1) Диагональные коэффициенты строго положительны:  $\beta_{ii} > 0$ . Коэффициент  $\beta_{12}$  отрицателен при

$$\lambda_1 \frac{\rho_d}{\varepsilon(1 + \rho_s)} < \frac{2}{15}(\lambda_1^2 - \lambda_1 - 5).$$

Коэффициент  $\beta_{21}$  отрицателен при

$$\lambda_2 \frac{\rho_d}{\varepsilon(1 + \rho_s)} > \frac{2}{15}(\lambda_2^2 - \lambda_2 - 5).$$

- (2) Матрица  $\hat{\beta}$  имеет строгое диагональное преобладание.  
(3) Выполняются неравенства  $\omega_1\beta_{11} - \omega_2|\beta_{21}| > 0$ ,  $\omega_2\beta_{22} - \omega_1|\beta_{12}| > 0$ .

Убедиться в справедливости этих условий позволяет непосредственная проверка, аналитическая либо численная. Заметим, что внедиагональные коэффициенты становятся отрицательными при больших значениях коэффициента диффузного отражения.

### 3 Формализация задачи

Для формализации краевой задачи (8), (11), (14)–(17) будем использовать пространство Соболева  $V = H^1(\Omega)$ . Через  $(f, v)$  обозначаем значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$  и скалярное произведение в  $L^2(\Omega)$ , если  $f, v \in L^2(\Omega)$ . Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i)  $\beta_{ij} = \text{const}$ ,  $\beta_{ii} > 0$ , матрица  $\hat{\beta}$  имеет строгое диагональное преобладание;  $\beta \geq \beta_0 = \text{const} > 0$ ,  $\beta \in L^\infty(\Gamma)$ ;  $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$ ;  
(ii)  $\omega_1\beta_{11} - \omega_2|\beta_{21}| > 0$ ,  $\omega_2\beta_{22} - \omega_1|\beta_{12}| > 0$ .

Определим операторы  $A: V \rightarrow V'$ ,  $B_{1,2}: V \times V \rightarrow V'$  и функционалы  $h, g_{1,2} \in V'$  по следующим формулам, справедливым для любого  $v \in V$ :

$$\begin{aligned} (A\theta, v) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v \, d\Gamma, \\ (B_1\{\psi_1, \psi_2\}, v) &= \alpha_1(\nabla\psi_1, \nabla v) + \int_{\Gamma} (\beta_{11}\psi_1 + \beta_{12}\psi_2)v \, d\Gamma, \\ (B_2\{\psi_1, \psi_2\}, v) &= \alpha_2(\nabla\psi_2, \nabla v) + \int_{\Gamma} (\beta_{21}\psi_1 + \beta_{22}\psi_2)v \, d\Gamma, \\ (h, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v \, d\Gamma, \quad (g_1, v) = \int_{\Gamma} \eta_1\theta_b^4 v \, d\Gamma, \quad (g_2, v) = \int_{\Gamma} \eta_2\theta_b^4 v \, d\Gamma. \end{aligned}$$

**Определение 1.** Тройка  $\{\theta, \psi_1, \psi_2\} \in V \times V \times V$  называется слабым решением краевой задачи (8), (11), (14)–(17), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3\theta - \varphi) = h, \quad (18)$$

$$B_1\{\psi_1, \psi_2\} + \tilde{\kappa}\psi_1 = \tilde{\kappa}_s\varphi + \kappa_a|\theta|^3\theta + g_1, \quad (19)$$

$$B_2\{\psi_1, \psi_2\} + \tilde{\kappa}\psi_2 = \tilde{\kappa}_s\varphi + \kappa_a|\theta|^3\theta + g_2,$$

где  $\varphi = \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2$ .

#### 4 Существование решения

В [9] установлено следующее свойство решения краевой задачи (14)–(17) при заданном поле температуры  $\theta$ .

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i),  $0 \leq \theta \leq M$ ,  $M = \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$ . Тогда существует единственное решение  $\{\psi_1, \psi_2\}$  задачи (19), причем  $0 \leq \psi_{1,2} \leq M^4$ .

Доказательство существования слабого решения задачи (8), (11), (14)–(17) проведем методом, предложенным в [10], а именно, построим итерационный процесс, порождающий монотонные и ограниченные последовательности приближений метода простой итерации, которые, как мы докажем, дают в пределе искомое слабое решение. Кроме того, мы покажем, что для предела  $\{\theta_*, \psi_{1*}, \psi_{2*}\}$  и любого ограниченного слабого решения  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\}$  выполняются неравенства  $\theta_* \leq \hat{\theta}$ ,  $\psi_{1*} \leq \hat{\psi}_1$ ,  $\psi_{2*} \leq \hat{\psi}_2$ . Этот факт будет использован в доказательстве единственности ограниченного решения.

Определим нелинейный оператор  $F: L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega) \cap V$ , который по заданной функции  $\varphi$  дает решение  $\theta = F(\varphi)$  задачи (18), а также нелинейные операторы  $G_{1,2}: L^\infty(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega) \cap V$ , которые по заданной функции  $\theta$  дают решения  $\psi_i = G_i(\theta)$  задачи (19).

Справедливы следующие свойства операторов  $F$  и  $G$ , которые доказываются по аналогии с [10] с использованием теоремы 1.

**Лемма 1.** Если  $\theta_1 \leq \theta_2$  и  $\varphi_1 \leq \varphi_2$  н.в. в  $\Omega$ , то  $F(\varphi_1) \leq F(\varphi_2)$  и  $G_i(\theta_1) \leq G_i(\theta_2)$  н.в. в  $\Omega$ .



**Лемма 2.** Пусть  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\}$  — любое неотрицательное, ограниченное решение задачи (18), (19). Тогда, если  $\{\theta_k, \psi_{1k}, \psi_{2k}\}$  — последовательность приближений метода простой итерации  $\theta_0 = 0$ ,  $\psi_{1k} = G_1(\theta_k)$ ,  $\psi_{2k} = G_2(\theta_k)$ ,  $\theta_{k+1} = F(\varphi_k)$ , где  $\varphi_k = \omega_1\psi_{1k} + \omega_2\psi_{2k}$ , то  $0 \leq \theta_k \leq \theta_{k+1} \leq \hat{\theta}$ ,  $0 \leq \psi_{1k} \leq \psi_{1,k+1} \leq \hat{\psi}_1$ ,  $0 \leq \psi_{2k} \leq \psi_{2,k+1} \leq \hat{\psi}_2$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Замечание 1.** В формулировке леммы 2 можно опустить слова «неотрицательное решение». Действительно, нулевую нижнюю границу можно заменить на  $C_0 = \text{ess inf } \hat{\theta}$  и положить  $\theta_0 = C_0$ . Доказательство практически не изменится.

Заметим, что последовательность приближений метода простой итерации обладает свойством ограниченности:  $0 \leq \theta \leq M$ ,  $0 \leq \psi_{1,2} \leq M^4$ , где  $M = \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$ . Таким образом, в пределе получаем решение, обладающее этим же свойством. Из лемм 1, 2 вытекает следующий результат.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i). Тогда существует решение  $\{\theta, \psi_1, \psi_2\}$  задачи (18), (19), обладающее свойством  $0 \leq \theta \leq M$ ,  $0 \leq \psi_{1,2} \leq M^4$ , где  $M = \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$ .

## 5 Единственность решения

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда существует единственное ограниченное решение задачи (18)–(19).

*Доказательство.* Пусть  $\{\theta_*, \psi_{1*}, \psi_{2*}\}$  — предел последовательности приближений метода простой итерации, и  $\{\hat{\theta}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\}$  — произвольное решение задачи (18)–(19) из класса  $[L^\infty(\Omega)]^3$ . Рассмотрим разность этих двух решений  $\theta = \hat{\theta} - \theta_*$ ,  $\psi_1 = \hat{\psi}_1 - \psi_{1*}$ ,  $\psi_2 = \hat{\psi}_2 - \psi_{2*}$ . По лемме 2 имеем  $\theta \geq 0$ ,  $\psi_{1,2} \geq 0$ .

Функции  $\theta, \psi_1, \psi_2$  подчиняются уравнениям

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta_1|^3\theta_1 - |\theta_2|^3\theta_2) - \varphi = 0, \quad (20)$$

$$B_1\{\psi_1, \psi_2\} + \tilde{\kappa}\psi_1 = \tilde{\kappa}_s\varphi + \kappa_a(|\theta_1|^3\theta_1 - |\theta_2|^3\theta_2), \quad (21)$$

$$B_2\{\psi_1, \psi_2\} + \tilde{\kappa}\psi_2 = \tilde{\kappa}_s\varphi + \kappa_a(|\theta_1|^3\theta_1 - |\theta_2|^3\theta_2), \quad (22)$$

где  $\varphi = \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2$ .

Умножим (21) скалярно на  $v = \omega_1$ , (22) на  $v = \omega_2$ , (20) на  $v = 1/b$  и сложим результаты. Получим

$$\frac{1}{b} \int_{\Gamma} \beta\theta \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\omega_1\beta_{11} + \omega_2\beta_{21})\psi_1 \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\omega_1\beta_{12} + \omega_2\beta_{22})\psi_2 \, d\Gamma = 0,$$

отсюда  $\theta|_{\Gamma} = \psi_1|_{\Gamma} = \psi_2|_{\Gamma} = 0$ .

Умножив уравнение (21) на  $b\omega_1$ , уравнение (22) на  $b\omega_2$  и сложив их сумму с уравнением (20), приходим к тождеству

$$a(\nabla\theta, \nabla v) + b\omega_1\alpha_1(\nabla\psi_1, \nabla v) + b\omega_2\alpha_2(\nabla\psi_2, \nabla v) = 0,$$

которое справедливо для любого  $v \in V$ . Полагая  $v = a\theta + b\alpha_1\omega_1\psi_1 + b\alpha_2\omega_2\psi_2$ , получаем  $a\theta + b\alpha_1\omega_1\psi_1 + b\alpha_2\omega_2\psi_2 = 0$  п.в. в  $\Omega$ , отсюда с учетом неотрицательности  $\theta, \psi_1, \psi_2$  вытекает, что  $\theta = \psi_1 = \psi_2 = 0$  п.в. в  $\Omega$ .  $\square$

## 6 Примеры

Приведем результаты вычислительного эксперимента при физических параметрах, соответствующих воздуху:  $\Omega$  – квадрат со стороной  $L = 1$ ,  $k = 0.0515$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\kappa_a = 1$ ,  $T_{\max} = 773$ ,  $n = 1$ ,  $h = 10$ ,  $\varepsilon = 0.5$ ,  $\rho_d = 0.2$ , рассеяние в среде считаем изотропным. Граничная температура  $\theta_b$  имеет вид  $\theta_b(x, 0) = 0.5$ ,  $\theta_b(x, L) = 1$ ,  $\theta_b(0, y) = \theta_b(L, y) = 0.5 + y/(2L)$ . Среднеквадратичное отклонение между полями температуры в  $P_1$ - и  $SP_3$ -моделях составило 0.00057 для  $\theta$  и 0.0017 для  $\varphi$ . При этом наибольшее отклонение между полями достигается ближе к нижней границе квадрата (см. рис. 1, 2). Если теперь положить  $\varepsilon = 0.75$ ,  $\rho_d = 0.2$ , то аналогичные характеристики составят, соответственно, 0.00051 и 0.0015. При  $\rho_d = 0$  характеристики отклонения между моделируемыми полями 0.0006 и 0.0018.

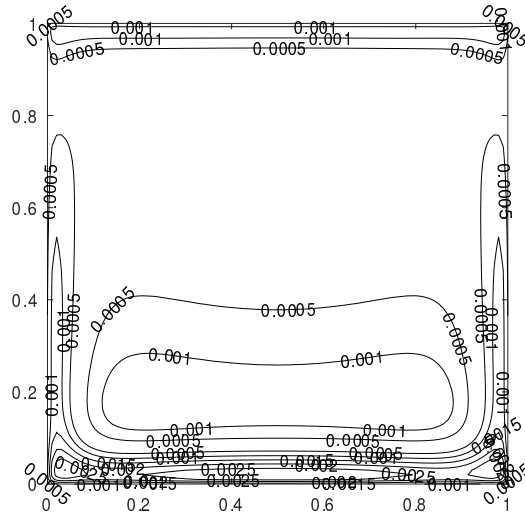


Рис. 1. Относительная разница между полями температуры в моделях  $P_1$  и  $SP_3$ .

Наконец, приведем результаты моделирования процесса сложного теплообмена при физических параметрах, соответствующих стеклу. Положим  $L = 0.25$ ,  $k = 1.2$ ,  $\kappa = 100$ ,  $\kappa_a = 100$ ,  $T_{\max} = 773$ ,  $n = 1.47$ ,  $h = 10$ ,  $\varepsilon = 0.75$ ,  $\rho_d = 0.2$ . Граничная температура вычисляется по той же формуле, что и выше. Отклонения между полями  $\theta$  и  $\varphi$  в  $P_1$ - и  $SP_3$ -моделях

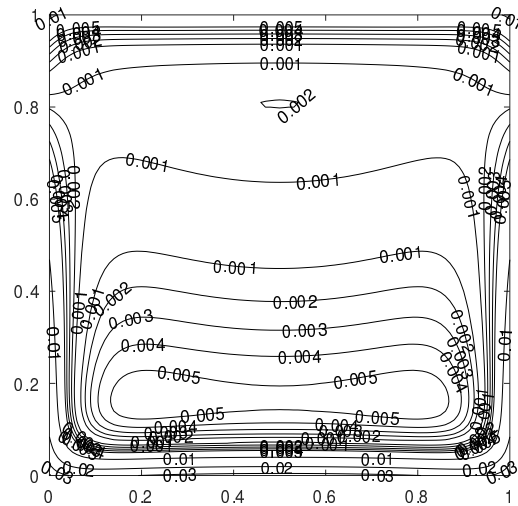


Рис. 2. Относительная разница между полями интенсивности излучения в моделях  $P_1$  и  $SP_3$ .

составляют, соответственно, 0.00026 и 0.00048. Если теперь положить  $\varepsilon = 0.75$ ,  $\rho_d = 0$ , то эти характеристики будут равны 0.00026 и 0.00052.

Из проведенных вычислений можно сделать вывод, что наблюдается тенденция увеличения отклонения между моделируемыми полями в  $P_1$ - и  $SP_3$  моделях при преобладании зеркального отражения.

Для вычислений применялся пакет FreeFem++ [24], использован упрощенный метод Ньютона квазилинеаризации уравнений сложного теплообмена [25] наряду с полным методом Ньютона, который состоит в одновременной замене во всех уравнениях  $\theta^4$  на  $\tilde{\theta}^4 + 4\tilde{\theta}^3(\theta - \tilde{\theta})$ , где  $\tilde{\theta}$  — приближение поля температуры с предыдущего шага. Вся полученная линейная система решается единым блоком в пакете FreeFem++.

Скорость сходимости упрощенного метода Ньютона в рассмотренных примерах аналогична сходимости для  $P_1$ -модели, то есть является линейной и, кроме этого, сильно различается для воздуха и для стекла.

Программная реализация доступна по ссылке

<https://github.com/grenkin/test-newton>.

## References

- [1] A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, *Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **75** (2019), 262–269. Zbl 1508.80003
- [2] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, A.A. Astrakhantseva, A.A. Sushchenko, *Optimal control of endovenous laser ablation*, Opt. Spectrosc., **128:9** (2020), 1508–1516.

- [3] A. Kovtanyuk, A. Chebotarev, A. Astrakhantseva, *Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **29**:3 (2021), 467–476. Zbl 1473.35564
- [4] E. Schneider, M. Seaid, J. Janicka, A. Klar, *Validation of simplified  $P_N$  models for radiative transfer in combustion systems*, Commun. Numer. Meth. Eng., **24**:2 (2008), 85–96. Zbl 1157.80402
- [5] E.W. Larsen, G. Thömmes, A. Klar, M. Seaid, T. Götz, *Simplified  $P_N$  approximations to the equations of radiative heat transfer and applications*, J. Comp. Phys., **183**:2 (2002), 652–675. Zbl 1016.65105
- [6] M.F. Modest, S. Lei, *The simplified spherical harmonics method for radiative heat transfer*, J. Phys. Conf. Ser., **369** (2012), 012019.
- [7] A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method*, Int. J. Heat Mass Transf., **55**:4 (2012), 649–654. Zbl 1262.80032
- [8] H. Zheng, W. Han, *On simplified spherical harmonics equations for the radiative transfer equation*, J. Math. Chem., **49**:8 (2011), 1785–1797. Zbl 1458.78003
- [9] R. Pinnau, O. Tse, *Optimal control of a simplified natural convection-radiation model*, Commun. Math. Sci., **11**:3 (2013), 679–707. Zbl 1286.35134
- [10] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **20**:3 (2015), 776–784. Zbl 1308.80002
- [11] A.E. Kovtanyuk, A.Yu. Chebotarev, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Solvability of  $P_1$  approximation of a conductive-radiative heat transfer problem*, Appl. Math. Comput., **249** (2014), 247–252. Zbl 1338.80015
- [12] A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, *Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **51**:6 (2017), 2511–2519. Zbl 1387.35122
- [13] A.A. Amosov, *Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with radiation diffuse reflection and refraction boundary-value conditions*, Proceedings of the Seventh International Conference on Differential and Functional-Differential Equations (Moscow, August 22–29, 2014), Part 2, CMFD, **59** (2016), 5–34.
- [14] A.A. Amosov, *Stationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary conditions of diffuse reflection and refraction of radiation*, Comput. Math. Math. Phys., **57**:3 (2017), 515–540. Zbl 1371.35138
- [15] P.S. Brantley, E.W. Larsen, *The simplified  $P_3$  approximation*, Nuclear Science and Engineering, **134**:1 (2000), 1–21.
- [16] R. Backofen, T. Bilz, A. Ribalta, A. Voigt,  *$SP_N$ -approximations of internal radiation in crystal growth of optical materials*, J. Crystal Growth, **266**:1-3 (2004), 264–270.
- [17] A. Klar, J. Lang, M. Seaid, *Adaptive solutions of  $SP_N$ -approximations to radiative heat transfer in glass*, Int. J. Therm. Sci., **44**:11 (2005), 1013–1023.
- [18] A.D. Klose, E.W. Larsen, *Light transport in biological tissue based on the simplified spherical harmonics equations*, J. Comput. Phys., **220**:1 (2006), 441–470. Zbl 1122.78015
- [19] M. Chu, K. Vishwanath, A.D. Klose, H. Dehghani, *Light transport in biological tissue using three-dimensional frequency-domain simplified spherical harmonics equations*, Phys. Med. Biol., **54**:8 (2009), 2493–2509.
- [20] R.G. McClarren, *Theoretical aspects of the simplified  $P_N$  equations*, Transp. Theory Stat. Phys. **39**:2-4 (2010), 73–109. Zbl 1213.82079
- [21] M.F. Modest, J. Cai, W. Ge, E. Lee, *Elliptic formulation of the simplified spherical harmonics method in radiative heat transfer*, Int. J. Heat Mass Transf., **76** (2014), 459–466.
- [22] M.F. Modest, *Radiative heat transfer*, Academic Press, 2013. ( Zbl 1356.80003 2016)

- [23] K.M. Case, P.F. Zweifel, *Linear transport theory*, Addison-Wesley, 1972. (Zbl 0162.58903 1967)
- [24] F. Hecht, *New development in freefem++*, J. Numer. Math., **20**:3-4 (2012), 251–265. Zbl 1266.68090
- [25] G.V. Grenkin, *Convergence of Newton's method for equations of complex heat transfer*, Dal'nevost. Mat. Zh., **17**:1 (2017), 3–10. Zbl 1395.65123

GLEB VLADIMIROVICH GRENKIN  
VLADIVOSTOK STATE UNIVERSITY,  
UL. GOGOLYA, 41,  
690014, VLADIVOSTOK, RUSSIA  
*Email address:* [Gleb.Grenkin@vvsu.ru](mailto:Gleb.Grenkin@vvsu.ru)