Аксиоматизируемость класса свободных частично упорядоченных полигонов*

М. А. ПЕРВУХИН
Владивостокский государственный университет экономики и сервиса
e-mail: pervukhinMA@yandex.ru

А. А. СТЕПАНОВА
Дальневосточный государственный университет
e-mail: stepltd@mail.ru

УДК 510.67+512.56

Ключевые слова: частично упорядоченные моноиды, свободные частично упорядоченные полигоны, модель, аксиоматизируемость.

Аннотация

В работе исследуются частично упорядоченные моноиды, класс свободных (над частично упорядоченным множеством) частично упорядоченных полигонов над которыми аксиоматизируем. Аналогичные вопросы для полигонов рассматривались в работах В. Гоулд, С. Балман-Флеминга и А. А. Степановой.

Abstract

M. A. Pervukhin, A. A. Stepanova, Axiomatizability of free S-posets, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 15 (2009), no. 1, pp. 99—115.

In this work, we investigate the partially ordered monoids S over which the class of free (over a poset) S-posets is axiomatizable. Similar questions for S-sets were considered in papers of V. Gould, S. Bulman-Fleming, and A. A. Stepanova.

Вопросы аксиоматизируемости классов полигонов были рассмотрены в работах [2, 6, 7, 9]. В [2] было получено описание моноидов с аксиоматизируемым классом свободных полигонов. Структура частично упорядоченных свободных (над множеством) полигонов аналогична структуре свободных полигонов, а именно частично упорядоченные свободные полигоны изоморфны копроизведению частично упорядоченных свободных циклических полигонов. Поэтому теоретико-модельные свойства свободных полигонов легко переносятся на случай частично упорядоченных свободных полигонов. В частности, как отмечено в данной работе, результат В. Гоулд об аксиоматизируемом классе свободных полигонов имеет место и для класса частично упорядоченных свободных полигонов.

*Работа поддержана грантом ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810.2008.1) и грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00336-а).

В [5] введено понятие частично упорядоченного полигона, свободного над частично упорядоченным множеством, и изучено строение частично упорядоченных моноидов с конечным числом различных правых идеалов, над которыми классы частично упорядоченных полигонов, свободных над частично упорядоченным множеством, аксиоматизируемы. Основным результатом данной работы является полное описание частично упорядоченных моноидов с аксиоматизируемым классом частично упорядоченных полигонов, свободных над частично упорядоченным множеством.

Авторство результатов данной работы неделимо.

1. Сведения из теории моделей полигонов

Напомним некоторые определения и факты из теории полигонов.

Пусть S — моноид, 1 — единица S. Через E обозначим множество идемпотентов моноида S. Структура $\langle A; L_S\rangle$ языка $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется *левым S-полигоном* (или просто *левым полигоном*), если для любых $a, a' \in A$ и $s, t \in S$

1) $(st)a = s(ta)$;
2) $1a = a$.

Аналогично определяется понятие правого S-полигона.

Частично упорядоченным моноидом называется моноид S, на котором введён частичный порядок $\leqslant$, такой что если $s, t, u \in S$ и $s \leqslant t$, то $us \leqslant ut$ и $su \leqslant tu$. Всюду под S будем понимать моноид или частично упорядоченный моноид, что будет ясно из контекста или отдельно оговорено. Пусть S — частично упорядоченный моноид. Структура $\langle A; L_S^{\leqslant}\rangle$ языка $L_S^{\leqslant} = \{s \mid s \in S\} \cup \{\leqslant\}$ называется *левым частично упорядоченным S-полигоном* (или просто *левым частично упорядоченным полигоном*), если для любых $a, a' \in A$ и $s, t \in S$

1) $(st)a = s(ta)$;
2) $1a = a$;
3) $a \leqslant a'$ влечёт $sa \leqslant sa'$;
4) $s \leqslant t$ влечёт $sa \leqslant ta$.

Везде далее, если не оговорено противное, под (частично упорядоченным) полигоном будем понимать левый (частично упорядоченный) полигон. Полигон $\langle A; L_S\rangle$ и частично упорядоченный полигон $\langle A; L_S^{\leqslant}\rangle$ будем обозначать одинаково через ${}_SA$, оговаривая каждый раз, является ли этот полигон упорядоченным. Заметим, что (частично упорядоченный) моноид S можно рассматривать как (частично упорядоченный) полигон ${}_SS$.

Под *гомоморфизмом* частично упорядоченных полигонов понимается сохраняющий порядок гомоморфизм соответствующих полигонов. Подструктура (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$ называется (*частично упорядоченным*) *подполигоном* (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$. *Конечно порождённым* (*частично упорядоченным*) *подполигоном* (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$ называется (частично упорядоченный) подполигон вида ${}_S(Sa_1 \cup \ldots \cup Sa_n)$, где $a_1, \ldots, a_n \in A$. *Циклическим* (*частично упорядоченным*) *подполигоном* (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$ называется (частично упорядоченный) полигон вида ${}_SSa$, где $a \in A$. *Копроизведением* (частично упорядоченных) полигонов ${}_SA_i$ $(i \in I)$ называется их дизъюнктное объединение, которое будем обозначать через $\coprod\limits_{i \in I} {}_SA_i$. Элементы x, y (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$ называются *связанными* (обозначение $x \sim y$), если существуют элементы $n \in \omega$, $a_0, \ldots, a_n \in A$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, такие что $x = a_0$, $y = a_n$ и $a_i = s_i a_{i-1}$ или $a_{i-1} = s_i a_i$ для любых i, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Связным* (частично упорядоченным) подполигоном (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$ называется (частично упорядоченный) подполигон ${}_SB$, такой что $x \sim y$ для любых $x, y \in B$. Легко понять, что $\sim$ является отношением конгруэнции на (частично упорядоченном) полигоне ${}_SA$, классы которого, являющиеся (частично упорядоченными) подполигонами, называются *связными компонентами* (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$.

Теорема 1.1 [8, 10]. *Всякий* (*частично упорядоченный*) *полигон единственным образом разложи́м в копроизведение связных* (*частично упорядоченных*) *полигонов.*

Важными для нас в дальнейшем будут понятия свободного, проективного и сильно плоского (частично упорядоченных) полигонов. Кроме определений, напомним алгебраические характеризации этих понятий.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — категории и $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — функтор. Объект a категории $\mathcal{A}$ называется *свободным* (*слева*) *над объектом* b *категории* $\mathcal{B}$ (по отношению к функтору $\mathcal{F}$) (см. [1]), если существует морфизм $u\colon b \to \mathcal{F}(a)$, такой что для любого объекта a' категории $\mathcal{A}$ и любого морфизма $u'\colon b \to \mathcal{F}(a')$ найдётся единственный морфизм $v\colon a \to a'$, такой что $u' = \mathcal{F}(v) \circ u$.

Категорию множеств, как обычно, обозначим через SET, категорию частично упорядоченных множеств через POSET. Ясно, что совокупность левых (частично упорядоченных) полигонов (для фиксированного (частично упорядоченного) моноида S) вместе с гомоморфизмами левых (частично упорядоченных) полигонов образует категорию, которую мы обозначим через S-SET (S-POSET). Аналогично определяется категория SET-S (POSET-S) правых (частично упорядоченных) полигонов.

Пусть $\mathcal{F}$ — забывающий функтор из категории S-SET в категорию SET. Полигон ${}_SF$ называется *свободным над множеством* X, если ${}_SF$ как объект категории S-SET свободен над множеством X как объектом категории SET. Если в данном определении заменить категорию S-SET на категорию S-POSET, получим определение частично упорядоченного полигона, *свободного над множеством* X; если, кроме этого, заменить категорию SET на категорию POSET, получим определение частично упорядоченного полигона, *свободного над частично упорядоченным множеством* X. Класс свободных над множеством полигонов обозначим через $\mathcal{F}r$, класс свободных над множеством частично упорядоченных полигонов — через $\mathcal{F}r^<$, класс свободных над частично упорядоченным множеством частично упорядоченных полигонов — через $\mathcal{F}r^{\ll}$.

Теорема 1.2 [10,13]. (*Частично упорядоченный*) *полигон* $_SF$ *является свободным над множеством* X *тогда и только тогда, когда* $_SF \cong \coprod\limits_{x\in X} {_SSx}$, где $_SSx$ — *копии* (*частично упорядоченного*) *полигона* $_SS$.

Теорема 1.3 [5]. *Частично упорядоченный полигон* $_SF$ *свободен над частично упорядоченным множеством* X *тогда и только тогда, когда* $_SF \cong \coprod\limits_{x\in X} {_SSx}$, *где* $_SSx$ — *копии частично упорядоченного полигона* $_SS$, *причём для любых* $s,t\in S$ *и* $x,y\in X$

$$s_x \leqslant t_y \iff s\leqslant t \ \text{ и } \ x\leqslant y, \tag{1}$$

где s_x, t_y — *копии элементов* $s,t\in S$ *в* Sx *и* Sy *соответственно.*

(Частично упорядоченный) полигон $_SA$ называется *сильно плоским*, если функтор $-\otimes {_SA}$ из категории SET-S (POSET-S) в категорию SET (POSET) сохраняет уравнители и универсальные квадраты. Класс сильно плоских (частично упорядоченных) полигонов обозначим через $\mathcal{SF}$ ($\mathcal{SF}^{<}$).

Теорема 1.4 [14]. *Полигон* $_SA$ *является сильно плоским тогда и только тогда, когда* $_SA$ *удовлетворяет условиям* (P) *и* (E):

(P) *если* $x,y\in A$ *и* $s,t\in S$ *такие, что* $sx=ty$, *то существуют элемент* $z\in A$ *и элементы* $s',t'\in S$, *такие что* $x=s'z$, $y=t'z$ *и* $ss'=tt'$;

(E) *если* $x\in A$ *и* $s,t\in S$ *такие, что* $sx=tx$, *то существуют* $z\in A$ *и* $s'\in S$, *такие что* $x=s'z$ *и* $ss'=ts'$.

Аналогичный результат справедлив и для частично упорядоченных полигонов.

Теорема 1.5 [12]. *Частично упорядоченный полигон* $_SA$ *является сильно плоским тогда и только тогда, когда* $_SA$ *удовлетворяет условиям* ($\mathrm{P}^{<}$) *и* ($\mathrm{E}^{<}$):

($\mathrm{P}^{<}$) *если* $x,y\in A$ *и* $s,t\in S$ *такие, что* $sx\leqslant ty$, *то существуют элемент* $z\in A$ *и элементы* $s',t'\in S$, *такие что* $x=s'z$, $y=t'z$ *и* $ss'\leqslant tt'$;

($\mathrm{E}^{<}$) *если* $x\in A$ *и* $s,t\in S$ *такие, что* $sx\leqslant tx$, *то существуют* $z\in A$ *и* $s'\in S$, *такие что* $x=s'z$ *и* $ss'\leqslant ts'$.

Следующее утверждение определяет связь между условиями (E) и ($\mathrm{E}^{<}$) и будет полезно нам в дальнейшем.

Утверждение 1.6 [5]. *Если частично упорядоченный полигон* $_SA$ *удовлетворяет условию* ($\mathrm{E}^{<}$), *то* $_SA$ *удовлетворяет условию* (E).

(Частично упорядоченный) полигон $_SP$ называется *проективным*, если для любого эпиморфизма $\pi\colon {_SA}\to {_SB}$ и всякого гомоморфизма $\varphi\colon {_SP}\to {_SB}$ существует гомоморфизм $\psi\colon {_SP}\to {_SA}$, такой что $\varphi=\pi\psi$. Класс проективных (частично упорядоченных) полигонов обозначим через $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}^{<}$). Условие, эквивалентное проективности (частично упорядоченного) полигона, даёт следующая теорема.

Теорема 1.7 [11,13]. *(Частично упорядоченный) полигон ${}_SP$ является проективным тогда и только тогда, когда ${}_SP$ изоморфен копроизведению (частично упорядоченных) полигонов ${}_SSe$ ($e \in E$).*

С понятиями сильно плоского и проективного (частично упорядоченных) полигонов тесно связано понятие совершенного (частично упорядоченного) моноида.

(Частично упорядоченный) полигон ${}_SB$ называется *оболочкой* (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$, если существует эпиморфизм $f\colon {}_SB \to {}_SA$, такой что для всякого (частично упорядоченного) подполигона ${}_SC$ (частично упорядоченного) полигона ${}_SB$ ограничение f на ${}_SC$ не является эпиморфизмом. Оболочка ${}_SB$ (частично упорядоченного) полигона ${}_SA$ называется *проективной оболочкой* ${}_SA$, если ${}_SB$ — проективный (частично упорядоченный) подполигон. (Частично упорядоченный) моноид S называется *совершенным слева*, если всякий (частично упорядоченный) полигон ${}_SA$ имеет проективную оболочку.

Теорема 1.8 [5, 8]. *Для (частично упорядоченного) моноида S следующие условия эквивалентны:*

1) *S — совершенный слева (частично упорядоченный) моноид;*
2) $\mathcal{SF} = \mathcal{P}$ ($\mathcal{SF}^{<} = \mathcal{P}^{<}$).

В дальнейшем нам будет полезно следующее утверждение.

Теорема 1.9 [2]. *Если S — совершенный слева моноид, $St_1 \subseteq St_0$ и полигоны ${}_SSt_1$ и ${}_SSt_0$ изоморфны, то $St_0 = St_1$.*

Напомним некоторые понятия и факты из теории моделей и теории моделей полигонов. Пусть L — язык первого порядка и $\mathcal{K}$ — класс L-структур. Класс $\mathcal{K}$ называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z языка L, что для любой L-структуры $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K} \iff \mathcal{A} \models \Phi \quad \text{для всех} \quad \Phi \in Z.$$

При изучении аксиоматизируемых классов мы будем часто использовать следующую теорему.

Теорема 1.10 [3]. *Если класс $\mathcal{K}$ аксиоматизируем, то $\mathcal{K}$ замкнут относительно ультрапроизведений.*

В [2, 5] описываются (частично упорядоченные) моноиды с аксиоматизируемыми классами свободных, проективных и сильно плоских (частично упорядоченных) полигонов. Приведём результаты из этих работ, которые будут использованы в дальнейшем.

Для произвольных $s, t \in S$ определим множества

$$r(s,t) = \{u \in S \mid su = tu\}, \quad R(s,t) = \{\langle u,v\rangle \in S \times S \mid su = tv\},$$
$$r^{<}(s,t) = \{u \in S \mid su \leqslant tu\}, \quad R^{<}(s,t) = \{\langle u,v\rangle \in S \times S \mid su \leqslant tv\}.$$

Теорема 1.11 [2]. *Класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда для любых $s, t \in S$*

1) *множество $r(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как правый идеал S;*
2) *множество $R(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$.*

Теорема 1.12 [2]. *Класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем и моноид S совершенен слева.*

Для формулировки критерия аксиоматизируемости класса свободных полигонов нам понадобятся новые понятия. Пусть $e \in E$ и $s, x \in S$. Будем говорить, что $s = xy$ является *e-хорошей факторизацией по x*, если $y \notin wS$ для любого такого $w \in S$, что $e = xw$ и $Sw = Se$.

Теорема 1.13 [2]. *Класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и S удовлетворяет следующему условию*:

> *для любого $e \in E \setminus \{1\}$ существует такое конечное множество $T \subseteq S$, что любой элемент $s \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по x для некоторого $x \in T$.* $(*)$

Непосредственно из доказательства этой теоремы (см. [2]) легко получается следующее утверждение.

Следствие 1.14. *Пусть S — частично упорядоченный моноид. Если класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем, то моноид S удовлетворяет условию $(*)$.*

Теорема 1.15 [5]. *Если любая ультрастепень частично упорядоченного полигона ${}_SS$ свободна над частично упорядоченным множеством, то частично упорядоченный моноид S совершенен слева.*

Теорема 1.16 [5]. *Пусть любая ультрастепень частично упорядоченного полигона ${}_SS$ является частично упорядоченным полигоном, свободным над частично упорядоченным множеством. Тогда для любых $s, t \in S$*

1) *множество $r^{<}(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как правый идеал S;*
2) *множество $R(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$.*

Будем говорить, что моноид S удовлетворяет *условию конечности правых решений*, если

$$\forall\, s \in S\ \exists\, n_s \in \mathbb{N}\ \forall\, t \in S\ |\{x \in S \mid sx = t\}| \leqslant n_s.$$

Утверждение 1.17 [2]. *Пусть S — такой моноид, что каждая ультрастепень полигона ${}_SS$ является проективным полигоном. Тогда S удовлетворяет условию конечности правых решений.*

2. Предварительные результаты

В этом разделе приводятся леммы, которые будут использоваться при доказательстве основного результата работы. Некоторые из данных лемм, с нашей точки зрения, представляют самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. *Если S — совершенный слева частично упорядоченный моноид, то S — совершенный слева моноид.*

Доказательство. Пусть S — совершенный слева частично упорядоченный моноид. По теореме 1.8 достаточно показать, что $\mathcal{SF} = \mathcal{P}$. Пусть ${}_SA$ — сильно плоский полигон. Определим на A отношение $\leqslant$ следующим образом:

$$sa \leqslant tb \iff \exists\, u \in A\ \exists\, s_1, s_2, t_1, t_2 \in S\colon$$
$$a = s_1u,\ b = t_1u,\ ss_1u = s_2u,\ tt_1u = t_2u,\ s_2 \leqslant t_2, \quad (2)$$

где $a, b \in A$, $s, t \in S$. Покажем, что $\leqslant$ — отношение частичного порядка. Рефлексивность отношения $\leqslant$ очевидна.

Покажем транзитивность отношения $\leqslant$. Пусть $a, b, c \in A$ и $s, t, r \in S$ такие, что $sa \leqslant tb \leqslant rc$. Тогда найдутся $u, v \in A$, $s_1, s_2, t_1, t_2, t', t'', r_1, r_2 \in S$, такие что выполняется (2) и $b = t'v$, $c = r_1v$, $tt'v = t''v$, $rr_1v = r_2v$, $t'' \leqslant r_2$. Заметим, что $t_2u = tt_1u = tb = tt'v = t''v$. Так как ${}_SA$ — сильно плоский полигон, то по теореме 1.4 полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (P). Следовательно, из равенства $t_2u = t''v$ следует существование таких $w \in A$ и $s_3, r_3 \in S$, что $u = s_3w$, $v = r_3w$ и $t_2s_3 = t''r_3$. Тогда $a = s_1s_3w$, $c = r_1r_3w$, $ss_1s_3w = ss_1u = s_2u = s_2s_3w$, $rr_1r_3w = rr_1v = r_2v = r_2r_3w$ и $s_2s_3 \leqslant t_2s_3 = t''r_3 \leqslant r_2r_3$. Транзитивность отношения $\leqslant$ показана.

Покажем симметричность отношения $\leqslant$. Пусть $a, b \in A$ и $s, t \in S$ такие, что $sa \leqslant tb \leqslant sa$. Тогда найдутся $u, v \in A$, $s_1, s_2, t_1, t_2, t', t'', r_1, r_2 \in S$, такие что выполняется (2) и $b = t'v$, $a = r_1v$, $tt'v = t''v$, $sr_1v = r_2v$, $t'' \leqslant r_2$. Из равенства $t_2u = t''v$, получаемого как и выше, по условию (P) найдутся такие $w \in A$ и $s_3, r_3 \in S$, что $u = s_3w$, $v = r_3w$ и $t_2s_3 = t''r_3$. Заметим, что $s_2s_3w = s_2u = ss_1u = sa = sr_1v = r_2v = r_2r_3w$. Из равенства $s_2s_3w = r_2r_3w$ по условию (E) получаем, что найдутся такие $x \in A$, $t \in S$, что $w = tx$ и $s_2s_3t = r_2r_3t$. Так как $s_2s_3t \leqslant t_2s_3t = t''r_3t \leqslant r_2r_3t$, то $s_2s_3t = t_2s_3t$ и $sa = s_2s_3w = s_2s_3tx = t_2s_3tx = t_2s_3w = t_2u = tt_1u = tb$. Симметричность отношения $\leqslant$ показана.

Нетрудно понять, что для любых $s, t, u, v \in S$ и $a, b \in A$, если $u \leqslant v$, $sa \leqslant tb$, то $usa \leqslant vtb$. Таким образом, ${}_SA$ — частично упорядоченный полигон.

Покажем, что частично упорядоченный полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию ($\mathrm{E}^{<}$). Предположим, что $sa \leqslant ta$ для некоторых $s, t \in S$, $a \in A$. Тогда найдутся такие $u \in A$, $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S$, что $a = s_1u = t_1u$, $ss_1u = s_2u$, $tt_1u = t_2u$ и $s_2 \leqslant t_2$. Поскольку $ss_1u = s_2u$ и полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (E), то найдутся такие $u_1 \in A$ и $r_1 \in S$, что $u = r_1u_1$ и $ss_1r_1 = s_2r_1$. Поскольку $tt_1r_1u_1 = tt_1u = t_2u = t_2r_1u_1$, т. е. $tt_1r_1u_1 = t_2r_1u_1$, и полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (E), то найдутся такие $u_2 \in A$ и $r_2 \in S$, что $u_1 = r_2u_2$ и $tt_1r_1r_2 = t_2r_1r_2$. Поскольку

$s_1r_1r_2u_2 = s_1r_1u_1 = s_1u = t_1u = t_1r_1u = t_1r_1r_2u_2 = t_1r_1r_2u_2$, т. е. $s_1r_1r_2u_2 = t_1r_1r_2u_2$, и полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (E), то найдутся такие $u_3 \in A$ и $r_3 \in S$, что $u_2 = r_3u_3$ и $t_1r_1r_2r_3 = s_1r_1r_2r_3$. Тогда $a = s_1r_1r_2r_3u_3$ и $ss_1r_1r_2r_3 = s_2r_1r_2r_3 \leqslant t_2r_1r_2r_3 = tt_1r_1r_2r_3 = ts_1r_1r_2r_3$. Таким образом, ${}_SA$ удовлетворяет условию ($\mathrm{E}^<$).

Покажем, что ${}_SA$ удовлетворяет условию ($\mathrm{P}^<$). Пусть $sa \leqslant tb$. Тогда выполняется (2). По условию (E) из равенства $ss_1u = s_2u$ следует существование таких $u_1 \in A$ и $r_1 \in S$, что $u = r_1u_1$ и $s_2r_1 = ss_1r_1$. Так как $t_2r_1u_1 = tt_1r_1u_1$ и полигон ${}_SA$ удовлетворяет условию (E), то найдутся такие $u_2 \in A$ и $r_2 \in S$, что $u_1 = r_2u_2$ и $t_2r_1r_2 = tt_1r_1r_2$. Таким образом, $a = s_1r_1r_2u_2$, $b = t_1r_1r_2u_2$ и $ss_1r_1r_2 = s_2r_1r_2 \leqslant t_2r_1r_2 = tt_1r_1r_2$.

По теореме 1.5 ${}_SA$ — сильно плоский частично упорядоченный полигон. Так как S — совершенный слева частично упорядоченный моноид, то по теореме 1.8 частично упорядоченный полигон ${}_SA$ проективен. По теореме 1.7 полигон ${}_SA$ изоморфен копроизведению циклических полигонов, порождённых идемпотентами, т. е. ${}_SA$ — проективный полигон. $\square$

Пусть S — моноид. Определим на S отношение эквивалентности $\mathcal{H}$ (см. [4]) следующим образом:

$$s\mathcal{H}t \iff Ss = St \ \text{ и } \ sS = tS,$$

где $s, t \in S$. Класс отношения $\mathcal{H}$ с представителем 1 обозначим $\mathcal{H}_1$. Заметим, что множество $\mathcal{H}_1$ является группой обратимых элементов моноида S.

Лемма 2.2. *Если S — совершенный слева моноид, $t \in S$ и $S = tS$, то $t \in \mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Пусть $t \in S$ и $S = tS$. Тогда найдётся такой элемент $t' \in S$, что $tt' = 1$. Заметим, что отображение $\varphi\colon {}_SS \to {}_SSt$, задаваемое правилом $\varphi(s) = st$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом полигонов. Действительно, если $kt = lt$, то $ktt' = ltt'$, т. е. $k = l$ для любых $k, l \in S$. Поскольку $St \subseteq S$, то по теореме 1.9 $St = S$, т. е. $t \in \mathcal{H}_1$. $\square$

Лемма 2.3. *Если существуют такие $s, t \in \mathcal{H}_1$, что $s < t$, то в частично упорядоченным моноиде S есть бесконечная возрастающая цепь.*

Доказательство. Предположим, что $s, t \in \mathcal{H}_1$ и $s < t$. Так как $s \in \mathcal{H}_1$, то существует элемент $s^{-1} \in S$, обратный для s. Умножив неравенство $s < t$ справа на s^{-1}, получим $1 \leqslant ts^{-1}$. Если бы $1 = ts^{-1}$, то $s = ts^{-1}s = t$, что неверно. Следовательно, $1 < ts^{-1}$. Введём обозначение $r = ts^{-1}$. Тогда $1 < r$, и, домножая обе части этого неравенства на r^i ($i \in \omega$), получим, что $r^i \leqslant r^{i+1}$. Поскольку $\mathcal{H}_1$ — группа, то $r^i \in \mathcal{H}_1$ для любого $i \in \omega$. Если $r^i = r^{i+1}$ для некоторого $i \in \omega$, то $1 = r^i(r^i)^{-1} = r^{i+1}(r^i)^{-1} = r$, что неверно. Таким образом получаем бесконечно возрастающую цепь $1 < r < r^2 < r^3 < \ldots$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть S — частично упорядоченный моноид. Если для любых $s, t \in S$ множество $r^<(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как правый идеал S и множество $R(s,t)$ либо пусто, либо является конечно* *порождённым как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$, то для любых $s, t \in S$ множество $r(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как правый идеал S.*

Доказательство. Пусть $s, t \in S$ и $r(s,t) \neq \varnothing$. Заметим, что $r(s,t) \subseteq r^{<}(s,t)$ и $r(s,t) \subseteq r^{<}(t,s)$. По условию

$$r^{<}(s,t) = \bigcup_{x \in X} xS, \quad r^{<}(t,s) = \bigcup_{y \in Y} yS$$

для некоторых конечных множеств $X \subseteq S$ и $Y \subseteq S$, в частности $sx \leqslant tx$ и $ty \leqslant sy$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Кроме того, для любых $x, y \in S$

$$R(x,y) = \bigcup_{\langle u,v \rangle \in W_{xy}} \langle u,v \rangle S$$

для некоторого конечного множества $W_{xy} \subseteq S \times S$, в частности $xu = yv$ для любых $\langle u,v \rangle \in W_{xy}$. Для $x \in X$ через U_x обозначим множество

$$\{u \in S \mid \langle u,v \rangle \in W_{xy} \text{ для некоторых } y \in Y \text{ и } v \in S\}.$$

Докажем равенство

$$r(s,t) = \bigcup_{x \in X} \bigcup_{u \in U_x} xuS.$$

Пусть $w \in r(s,t)$. Так как $r(s,t) \subseteq r^{<}(s,t)$ и $r(s,t) \subseteq r^{<}(t,s)$, то $w = xw' = yw''$ для некоторых $x \in X$, $y \in Y$, $w', w'' \in S$ и $\langle w', w'' \rangle \in R(x,y)$. Следовательно, $\langle w', w'' \rangle = \langle u,v \rangle z$ для некоторых $\langle u,v \rangle \in W_{xy}$ и $z \in S$. Тогда $w = xuz$ и $w \in \bigcup_{x \in X} \bigcup_{u \in U_x} xuS$. Включение

$$r(s,t) \subseteq \bigcup_{x \in X} \bigcup_{u \in U_x} xuS$$

доказано.

Пусть $x \in X$, $u \in U_x$ и $w \in S$. Тогда $xu = yv$ для некоторых $y \in Y$, $v \in S$. Следовательно, $sxu = syv$ и $txu = tyv$. Из неравенств $sx \leqslant tx$ и $ty \leqslant sy$ следует, что $sxu \leqslant txu = tyv \leqslant syv = sxu$, т. е. $sxu = txu$. Следовательно, $sxuw = txuw$ и $xuw \in r(s,t)$. Включение

$$\bigcup_{x \in X} \bigcup_{u \in U_x} xuS \subseteq r(s,t)$$

доказано. □

Лемма 2.5. *Пусть S — частично упорядоченный моноид. Если класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем, то класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем.*

Доказательство. Пусть класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем. По следствию 1.14 моноид S удовлетворяет условию $(*)$. По теореме 1.10 всякая ультрастепень частично упорядоченного полигона ${}_SS$ является частично упорядоченным полигоном, свободным над частично упорядоченным множеством. По теореме 1.16

для любых $s, t \in S$ множество $r^{<}(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как правый идеал S и множество $R(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как подполигон правого полигона $(S \times S)_S$. По лемме 2.4 для любых $s, t \in S$ множество $r(s,t)$ либо пусто, либо является конечно порождённым как правый идеал S. По теореме 1.11 класс $\mathcal{SF}$ аксиоматизируем. По теореме 1.15 частично упорядоченный моноид S совершенен слева. Следовательно, по лемме 2.1 моноид S также совершенен слева, что по теореме 1.12 влечёт аксиоматизируемость класса $\mathcal{P}$. Таким образом, по теореме 1.13 класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем. □

3. Аксиоматизируемость класса свободных частично упорядоченных полигонов

Следующая теорема даёт характеризацию частично упорядоченных моноидов, над которыми класс частично упорядоченных полигонов, свободных над множеством, аксиоматизируем. Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1.13, поэтому мы его здесь не приводим.

Теорема 3.1. *Класс $\mathcal{F}r^{<}$ аксиоматизируем тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{P}^{<}$ аксиоматизируем и S удовлетворяет следующему условию:*

для любого $e \in E \setminus \{1\}$ существует такое конечное множество $T \subseteq S$, что любой элемент $s \in S$ имеет e-хорошую факторизацию по x для некоторого $x \in T$. $(*)$

Основным результатом этой работы является теорема 3.2, описывающая частично упорядоченные моноиды с аксиоматизируемым классом частично упорядоченных полигонов, свободных над частично упорядоченным множеством. Для формулировки этой теоремы нам понадобится ряд обозначений.

Пусть S — частично упорядоченный моноид и $s, t \in S$, $r \in \mathcal{H}_1$. Определим следующие множества:

$\langle x, y\rangle \in L_1(s,t) \Longleftrightarrow x$ — максимальный элемент частично упорядоченного множества S, такой что $sx \leqslant ty$;

$\langle x, y\rangle \in L_2(s,t) \Longleftrightarrow x$ — максимальный элемент частично упорядоченного множества S, такой что $sx < ty$ и либо $sx \notin tS$, либо $ty \notin sS$;

$\langle x, y\rangle \in L_3(r) \Longleftrightarrow y \neq ry$ и x — максимальный элемент частично упорядоченного множества S, такой что $x \leqslant ry$ и $x \leqslant y$.

Теорема 3.2. *Пусть S — частично упорядоченный моноид. Класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем в том и только том случае, если*

1) *класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем;*
2) *частично упорядоченное множество S не содержит бесконечно возрастающих и бесконечно убывающих цепей;*
3) *для любого $\rho \in S \times S$ множество $r^{<}(\rho)$ пусто или является конечно порождённым как правый идеал S;*

4) *для любых* $i \in \{1,2\}$ *и* $\rho \in S \times S$ *множество* $L_i(\rho)$ *пусто или существует такое конечное множество* $L^i_\rho \subseteq L_i(\rho)$, *что* $L_i(\rho) \subseteq \bigcup\limits_{\langle x,y\rangle \in L^i_\rho} \langle x,y\rangle S$;

5) *для любого* $s \in \mathcal{H}_1$ *множество* $L_3(s)$ *пусто или существует такое конечное множество* $L^3_s \subseteq L_3(s)$, *что* $L_3(s) \subseteq \bigcup\limits_{\langle x,y\rangle \in L^3_s} \langle x,y\rangle S$.

Доказательство. Необходимость. Пусть класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем. Из леммы 2.5 следует утверждение 1).

Докажем утверждение 2). Предположим, что в S есть бесконечно возрастающая цепь $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ и D — произвольный неглавный ультрафильтр на ω. По теореме 1.10 ${}_SS^\omega/D \in \mathcal{F}r^{\ll}$. Заметим, что $S \cdot \bar{1}/D$, где $\bar{1}(j) = 1$ $(j \in \omega)$, является связной компонентой частично упорядоченного полигона ${}_SS^\omega/D$. Действительно, если $\bar{1}/D = t\bar{c}/D$ для некоторых $t \in S$ и $\bar{c} \in S^\omega$, то, поскольку свободный полигон является проективным, по утверждению 1.17 множество $\{x \in S \mid tx = 1\}$ конечно и, следовательно, $\bar{c}/D \in S \cdot \bar{1}/D$. Рассмотрим элементы $\bar{a}, \bar{a}_i \in S^\omega$, где $\bar{a}(j) = a_j$ и $\bar{a}_i(j) = a_i$ $(i, j \in \omega)$. Ясно, что $\bar{a}_i/D < \bar{a}/D$, причём $\bar{a}_i/D \in S \cdot \bar{1}/D$ и $\bar{a}/D \notin S \cdot \bar{1}/D$. Поскольку класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем, то ${}_SS^\omega/D \in \mathcal{F}r^{\ll}$ и существует изоморфизм связной компоненты частично упорядоченного полигона ${}_SS^\omega/D$, содержащей элемент $\bar{a}/D$, в связную компоненту ${}_SS \cdot \bar{1}/D$. Предположим, что $\bar{b}/D$ — образ элемента $\bar{a}/D$ при этом изоморфизме и $\bar{b}(j) = b \in S$ $(j \in \omega)$. Так как $\bar{a}_i/D < \bar{a}/D$ $(i \in \omega)$, то по теореме 1.3 $\bar{b}/D < \bar{a}/D$ и $\bar{a}_i/D < \bar{b}/D$ для любого $i \in \omega$. Следовательно, существует такой элемент $j \in \omega$, что $b < a_j$ и $a_i < b$ для любого $i \in \omega$, т. е. $a_i < a_j$ для любого $i \in \omega$. Противоречие. Аналогично доказывается отсутствие в S бесконечно убывающих цепей.

Из теоремы 1.16 следует утверждение 3).

Докажем утверждение 4). Предположим, что $i \in \{1,2\}$ и существует $\rho(s,t) \in S \times S$, для которого условие 4) не выполняется. Пусть

$$\{\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_i(\rho) \mid \alpha < \gamma\} \,—$$

множество минимальной мощности γ, такое что $L_i(\rho) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$. Поскольку γ бесконечен, то он является предельным ординалом. Можно считать, что

$$\langle x_\beta, y_\beta\rangle \notin \bigcup_{\alpha<\beta} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S \tag{3}$$

для любого $\beta < \gamma$. Пусть D — произвольный неглавный ультрафильтр на γ. Так как класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем, то ${}_SS^\gamma/D \in \mathcal{F}r^{\ll}$. Рассмотрим элементы $\bar{x}, \bar{y} \in S^\gamma$, где $\bar{x}(\alpha) = x_\alpha$, $\bar{y}(\alpha) = y_\alpha$ $(\alpha \in \gamma)$. Заметим, что $s\bar{x}/D \leqslant t\bar{y}/D$, причём если $i = 2$, то $s\bar{x}/D \notin tS^\gamma/D$ или $t\bar{y}/D \notin sS^\gamma/D$.

Предположим, что элементы $\bar{x}/D$ и $\bar{y}/D$ находятся в разных связных компонентах частично упорядоченного полигона ${}_SS^\gamma/D$. Так как ${}_SS^\gamma/D \in \mathcal{F}r^{\ll}$, то существует изоморфизм из связной компоненты частично упорядоченного полигона ${}_SS^\gamma/D$, содержащей элемент $\bar{x}/D$, в связную компоненту частично упорядоченного полигона ${}_SS^\gamma/D$, содержащую элемент $\bar{y}/D$. Пусть $\bar{x}'/D$ — образ элемента $\bar{x}/D$ при этом изоморфизме и $\bar{x}'(\alpha) = x'_\alpha$ для любого $\alpha \in \gamma$, причём если $i = 2$, то $s\bar{x}'/D \notin tS^\gamma/D$ или $t\bar{y}/D \notin sS^\gamma/D$. По теореме 1.3 $\bar{x}/D < \bar{x}'/D$ и $s\bar{x}'/D \leqslant t\bar{y}/D$. Тогда $s\bar{x}/D < s\bar{x}'/D \leqslant t\bar{y}/D$. Поэтому найдётся такое $\alpha \in \gamma$, что $x_\alpha < x'_\alpha$, $sx_\alpha < sx'_\alpha \leqslant ty_\alpha$ и при $i = 2$ либо $sx'_\alpha \notin tS$, либо $ty_\alpha \notin sS$, что противоречит условию $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_i(\rho)$.

Пусть элементы $\bar{x}/D$ и $\bar{y}/D$ находятся в одной связной компоненте частично упорядоченного полигона ${}_SS^\gamma/D$. По теореме 1.3 существует изоморфизм из этой связной компоненты в частично упорядоченный полигон ${}_SS$. Пусть $\bar{h}/D$ — прообраз 1, $\bar{x}/D$ — прообраз $k \in S$ и $\bar{y}/D$ — прообраз $l \in S$ при этом изоморфизме. Из неравенства $s\bar{x}/D \leqslant t\bar{y}/D$ получаем, что $sk \leqslant tl$ и при $i = 2$ либо $sk \notin tS$, либо $tl \notin sS$. Покажем, что $\langle k, l\rangle \in L_i(\rho)$. Пусть $k \leqslant k'$, $sk \leqslant sk' \leqslant tl$ и при $i = 2$ либо $sk' \notin tS$, либо $tl \notin sS$. Домножая эти неравенства справа на $\bar{h}/D$ и вводя обозначение $\bar{x}'/D = k'\bar{h}/D$, получим, что $\bar{x}/D \leqslant \bar{x}'/D$, $s\bar{x}/D \leqslant s\bar{x}'/D \leqslant t\bar{y}/D$ и при $i = 2$ либо $s\bar{x}'/D \notin tS^\gamma/D$, либо $t\bar{y}/D \notin sS^\gamma/D$. Тогда

$$I = \{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha \leqslant x'_\alpha,\ sx_\alpha \leqslant sx'_\alpha \leqslant ty_\alpha \text{ и при } i = 2 \text{ либо } sx'_\alpha \notin tS, \text{ либо } ty_\alpha \notin sS\} \in D.$$

Так как $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_i(\rho)$ для любого $\alpha \in \gamma$, то $I \subseteq \{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha = x'_\alpha\}$. Следовательно, $\{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha = x'_\alpha\} \in D$ и $\bar{x}/D = \bar{x}'/D$, откуда $k = k'$ и $\langle k, l\rangle \in L_i(\rho) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\gamma} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$, т. е. $\langle k, l\rangle = \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle r$ для некоторых $\alpha \in \gamma$ и $r \in S$. С другой стороны, $\langle \bar{x}/D, \bar{y}/D\rangle = \langle k, l\rangle\bar{h}/D$. Поэтому найдётся такой $\beta > \alpha$, что $\langle x_\beta, y_\beta\rangle \in \langle k, l\rangle S \subseteq \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$, что противоречит (3).

Докажем утверждение 5). Предположим, что существует элемент $s \in \mathcal{H}_1$, для которого условие 5) не выполняется. Так же, как и при доказательстве утверждения 4), для множества $L_3(s)$ строим множество

$$\{\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_3(s) \mid \alpha \in \gamma\},$$

такое что (3) выполняется для всех $\beta < \gamma$, D — ультрафильтр на γ и элементы $\bar{x}/D, \bar{y}/D$ из S^γ/D. Ясно, что $\bar{x}/D \leqslant \bar{y}/D$, $\bar{x}/D \leqslant s\bar{y}/D$ и $\bar{y}/D \neq s\bar{y}/D$.

Предположим, что элементы $\bar{x}/D$ и $\bar{y}/D$ находятся в разных связных компонентах частично упорядоченного полигона ${}_SS^\gamma/D$. Пусть $\bar{h}/D$ — порождающий элемент связной компоненты частично упорядоченного полигона ${}_SS^\gamma/D$, содержащей $\bar{x}/D$, $\bar{h}'/D$ — порождающий элемент связной компоненты частично упорядоченного полигона ${}_SS^\gamma/D$, содержащей $\bar{y}/D$, $\bar{h}'(\alpha) = h'_\alpha$ для любых $\alpha \in \gamma$. Существует изоморфизм из частично упорядоченного полигона ${}_SS\bar{h}/D$ в частично упорядоченный полигон ${}_SS\bar{h}'/D$. Можно считать, что $\bar{h}'/D$ — образ элемента $\bar{h}/D$ при этом изоморфизме. По теореме 1.3 $\bar{h}/D < \bar{h}'/D$, $t\bar{h}'/D \leqslant r\bar{h}'/D = \bar{y}/D$ и $t\bar{h}'/D \leqslant sr\bar{h}'/D = s\bar{y}/D$. Таким образом, $\bar{x}/D < t\bar{h}'/D \leqslant \bar{y}/D$ и $\bar{x}/D < t\bar{h}'/D \leqslant s\bar{y}/D$. Поэтому найдётся такой $\alpha \in \gamma$, что $x_\alpha < th'_\alpha$, $th'_\alpha \leqslant y_\alpha$ и $th'_\alpha \leqslant sy_\alpha$, что противоречит условию $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_3(s)$.

Пусть элементы $\bar{x}/D, \bar{y}/D$ находятся в одной связной компоненте частично упорядоченного полигона ${}_SS^\gamma/D$. По теореме 1.3 существует изоморфизм из этой связной компоненты в частично упорядоченный полигон ${}_SS$. Пусть $\bar{h}/D$ — прообраз 1, $\bar{x}/D$ — прообраз k и $\bar{y}/D$ — прообраз l при этом изоморфизме. Из соотношений $\bar{x}/D \leqslant \bar{y}/D$, $\bar{x}/D \leqslant s\bar{y}/D$ и $\bar{y}/D \neq s\bar{y}/D$ получаем, что $k \leqslant l$, $k \leqslant sl$ и $l \neq sl$. Покажем, что $\langle k, l\rangle \in L_3(s)$. Пусть $k \leqslant k'$, $k' \leqslant l$ и $k' \leqslant sl$. Домножая эти неравенства справа на $\bar{h}/D$ и вводя обозначение $\bar{x}'/D = k'\bar{h}/D$, получим $\bar{x}'/D \leqslant \bar{y}/D$ и $\bar{x}'/D \leqslant s\bar{y}/D$. Тогда

$$I = \{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha \leqslant x'_\alpha,\ x'_\alpha \leqslant y_\alpha \text{ и } x'_\alpha \leqslant sy_\alpha\} \in D.$$

Так как $\langle x_\alpha, y_\alpha\rangle \in L_3(s)$ для любого $\alpha \in \gamma$, то $I \subseteq \{\alpha < \gamma \mid x_\alpha = x'_\alpha\}$. Следовательно, $\{\alpha \in \gamma \mid x_\alpha = x'_\alpha\} \in D$ и $\bar{x}/D = \bar{x}'/D$, откуда $k = k'$ и $\langle k, l\rangle \in L_3(s) \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\gamma} \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$, т. е. $\langle k, l\rangle = \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle r$ для некоторых $\alpha \in \gamma$ и $r \in S$. С другой стороны, $\langle \bar{x}/D, \bar{y}/D\rangle = \langle k, l\rangle \bar{h}/D$. Откуда найдётся такой $\beta > \alpha$, что $\langle x_\beta, y_\beta\rangle \in \langle k, l\rangle S \subseteq \langle x_\alpha, y_\alpha\rangle S$, что противоречит (3).

Достаточность. Предположим, что условия 1)—5) теоремы выполнены. Пусть $\rho = (s, t) \in S \times S$. Если $r^<(\rho) \neq \varnothing$, то выберем и зафиксируем конечное множество $\bar{r}_\rho$ порождающих $r^<(\rho)$. Определим предложение $\Phi_r(\rho)$ языка $L_S^{\leqslant}$ следующим образом: если $r^<(\rho) = \varnothing$, то

$$\Phi_r(\rho) \leftrightharpoons \forall x\ \neg(sx \leqslant tx),$$

в противном случае, когда $r^<(\rho) \neq \varnothing$, полагаем

$$\Phi_r(\rho) \leftrightharpoons \forall x\ \Bigl(sx \leqslant tx \to \exists z \bigvee_{u\in\bar{r}_\rho} x = uz\Bigr).$$

Введём обозначения:

$$\alpha_\rho(x, y) \rightleftharpoons sx < ty \wedge \bigl(\neg\exists u\ (sx = tu) \vee \neg\exists u\ (ty = su)\bigr),$$
$$\gamma_s(x, y) \rightleftharpoons x \leqslant y \wedge x \leqslant sy \wedge y \neq sy.$$

Определим предложение $\Phi_{L_1}(\rho)$ языка $L_S^{\leqslant}$ следующим образом: если $L_1(\rho) = \varnothing$, то

$$\Phi_{L_1}(\rho) \leftrightharpoons \forall xy\ \neg(sx \leqslant ty),$$

в противном случае, когда $L_1(\rho) \neq \varnothing$, полагаем

$$\Phi_{L_1}(\rho) \rightleftharpoons \forall xy\ \Bigl(sx \leqslant ty \to \exists z\ \Bigl(sz \leqslant ty \wedge x \leqslant z \wedge \wedge \forall z'\ (z \leqslant z' \wedge sz' \leqslant ty \to z = z') \wedge \exists w \bigvee_{\langle u,v\rangle\in L^1_\rho} \langle z, y\rangle = \langle u, v\rangle w\Bigr)\Bigr).$$

Определим предложение $\Phi_{L_2}(\rho)$ языка $L_S^{\leqslant}$ следующим образом: если $L_2(\rho) = \varnothing$, то

$$\Phi_{L_2}(\rho) \leftrightharpoons \forall xy\ \neg\alpha_\rho(x, y),$$

в противном случае, когда $L_2(\rho) \neq \varnothing$, полагаем

$$\Phi_{L_2}(\rho) \rightleftharpoons \forall\, xy\ \Big(\alpha_\rho(x,y) \to \exists\, z\ \Big(\alpha_\rho(z,y) \wedge x \leqslant z \wedge \\ \wedge \forall\, z'\ (\alpha_\rho(z',y) \wedge z \leqslant z' \to z = z') \wedge \exists\, w \bigvee_{\langle u,v\rangle \in L_\rho^2} \langle z,y\rangle = \langle u,v\rangle w\Big)\Big).$$

Пусть $s \in \mathcal{H}_1$. Определим предложение $\Phi_{L_3}(s)$ языка $L_S^{\leqslant}$ следующим образом: если $L_3(s) = \varnothing$, то

$$\Phi_{L_3}(s) \rightleftharpoons \forall\, xy\ \neg\gamma_s(x,y),$$

в противном случае, когда $L_3(s) \neq \varnothing$, полагаем

$$\Phi_{L_3}(s) \rightleftharpoons \forall\, xy\ \Big(\gamma_s(x,y) \to \exists\, z\ \Big(x \leqslant z \wedge \gamma_s(z,y) \wedge \\ \wedge \forall\, z'\ (z \leqslant z' \wedge \gamma_s(z',y) \to z = z') \wedge \exists\, w \bigvee_{\langle u,v\rangle \in L_s^3} \langle z,y\rangle = \langle u,v\rangle w\Big)\Big).$$

По условию класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем. Обозначим через $\Sigma_{\mathcal{F}r}$ множество аксиом для этого класса. Пусть

$$\Sigma_{\mathcal{F}r^{\ll}} = \Sigma_{\mathcal{F}r} \cup \{\Phi_r(\rho) \mid \rho \in S \times S\} \cup \{\Phi_{L_1}(\rho) \mid \rho \in S \times S\} \cup \\ \cup \{\Phi_{L_2} < (\rho) \mid \rho \in S \times S\} \cup \{\Phi_{L_3}(s) \mid s \in \mathcal{H}_1\}.$$

Докажем, что $\Sigma_{\mathcal{F}r^{\ll}}$ является множеством аксиом класса $\mathcal{F}r^{\ll}$.

Предположим, что ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r^{\ll}}$. По теореме 1.1 ${}_SA = \coprod\limits_{x \in X} {}_SA_x$, где ${}_SA_x$ — связные компоненты. Пусть $x \in X$. Так как ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r}$, то полигон ${}_SA_x$ изоморфен полигону ${}_SS$. Зафиксируем $h_x \in A_x$ и отображение $\varphi\colon {}_SA_x \to {}_SS$, такие что ${}_SA_x = {}_SSh_x$, $\varphi(h_x) = 1$ и φ является изоморфизмом полигонов. Покажем, что частично упорядоченные полигоны ${}_SSh_x$ и ${}_SS$ изоморфны. Для этого достаточно показать, что

$$sh_x \leqslant th_x \iff s \leqslant t$$

для любых $s,t \in S$. Если $s \leqslant t$, то по определению частично упорядоченного полигона $sh_x \leqslant th_x$. Пусть $sh_x \leqslant th_x$. Так как ${}_SA_x \models \Phi_r(s,t)$, то найдутся такие $u \in Sh_x$ и $r \in S$, что $h_x = ru$ и $sr \leqslant tr$. Из того что $u \in Sh_x$, следует существование такого элемента $r' \in S$, что $u = r'h_x$. Тогда $h_x = rr'h_x$, и, действуя изоморфизмом φ на обе части этого равенства, получаем $1 = rr'$. Умножив неравенство $sr \leqslant tr$ справа на r', получим $srr' \leqslant trr'$, откуда следует, что $s \leqslant t$. Таким образом, частично упорядоченные полигоны ${}_SSh_x$ и ${}_SS$ изоморфны.

Заметим, что на частично упорядоченном множестве $\mathcal{H}_1$ отношение $\leqslant$ тривиально. Действительно, пусть $z_1 < z_2$ для некоторых $z_1, z_2 \in \mathcal{H}_1$. Тогда $1 < z_2 z_1^{-1}$. Обозначив $z_2 z_1^{-1}$ через u, получим возрастающую цепь $1 < u \leqslant u^2 \leqslant u^3 \leqslant \ldots$. Если $u^i = u^j$ для некоторых $i,j \in \omega$, $j > i$, то, поскольку $u^i \in \mathcal{H}_1$, имеет место равенство $1 = u^{j-i}$, следовательно, $1 = u$, что неверно. Таким образом, получили строго возрастающую цепь элементов частично упорядоченного моноида S, что противоречит условию 2).

Определим на множестве X отношение $\leqslant$ следующим образом:

$$x \leqslant y \iff \exists\, z \in \mathcal{H}_1 \colon h_x \leqslant z h_y$$

для любых $x, y \in X$. Так как на частично упорядоченном множестве $\mathcal{H}_1$ отношение порядка тривиально, то на X отношение $\leqslant$ является отношением порядка. Покажем, что ${}_SA$ — свободный частично упорядоченный полигон над частично упорядоченным множеством X. Пусть $h_1, h_2 \in \{h_x \mid x \in X\}$, $h_1 \neq h_2$.

Предположим, что $h_1 < z_0 h_2$. Покажем, что существует такой элемент $z \in \mathcal{H}_1$, что $h_1 < z h_2$ и $z \leqslant z_0$. Если $z_0 \in \mathcal{H}_1$, то в качестве z берём z_0. Пусть $z_0 \notin \mathcal{H}_1$. Так как класс $\mathcal{F}r$ аксиоматизируем, то по теореме 1.13 класс $\mathcal{P}$ аксиоматизируем и по теореме 1.12 моноид S совершенен слева. Тогда по лемме 2.2 $1 \notin z_0 S$. Так как ${}_SA \models \Phi_{L_2}(1, z_0)$, то найдётся такой элемент $z_1 \in S$, что $z_1 h_2 \leqslant z_0 h_2$, $h_1 < z_1 h_2$ и $z_1 \notin z_0 S$. Если $z_1 \in \mathcal{H}_1$, то в качестве z выбираем z_1. Иначе, поскольку ${}_SA \models \Phi_{L_2}(1, z_1)$, получаем такой элемент $z_2 \in S$, что $z_2 h_2 \leqslant z_1 h_2$, $h_1 < z_2 h_2$ и $z_2 \notin z_1 S$. Если $z_2 \in \mathcal{H}_1$, то в качестве z выбираем z_2. В противном случае продолжаем этот процесс. В результате получаем либо элемент $z_i \in \mathcal{H}_1$, для которого $h_1 \leqslant z_i h_2$, либо убывающую цепь $z_0 h_2 \geqslant z_1 h_2 \geqslant z_2 h_2 \geqslant \ldots$, в которой в силу соотношений $z_{i+1} \notin z_i S$ $(i \in \omega)$ все неравенства строгие, что противоречит условию 2).

Покажем, что элемент $z \in \mathcal{H}_1$, такой что $h_1 < z h_2$, единственный. Предположим, что существует такой $z' \in \mathcal{H}_1$, что $h_1 < z' h_2$ и $z \neq z'$. Тогда $h_1 < z' z^{-1}(z h_2)$. Поскольку ${}_SA \models \Phi_{L_3}(z' z^{-1})$, найдётся такой элемент $z_1 \in S$, что $h_1 \leqslant z_1 h_2$, $z_1 \leqslant z$ и $z_1 \leqslant z'$. Тогда, как замечено выше, существует такой элемент $z_2 \in \mathcal{H}_1$, что $h_1 \leqslant z_2 h_2 \leqslant z_1 h_2$. Отсюда следуют неравенства $z_2 \leqslant z$ и $z_2 \leqslant z'$. Так как z и z' — различные элементы, то либо $z_2 < z$, либо $z_2 < z'$, т. е. в частично упорядоченном множестве $\mathcal{H}_1$ порядок не тривиальный. Противоречие.

Предположим, что $s h_1 < t h_2$. Докажем, что существует единственный элемент $z \in \mathcal{H}_1$, такой что $h_1 \leqslant z h_2$ и $s z h_2 \leqslant t h_2$. Так как ${}_SA \models \Phi_{L_1}(s, t)$, то найдётся такой элемент $z' \in S$, что $s z' h_2 \leqslant t h_2$ и $h_1 \leqslant z' h_2$. По доказанному выше существует единственный элемент $z \in \mathcal{H}_1$, такой что $h_1 \leqslant z h_2 \leqslant z' h_2$. Тогда $s z h_2 \leqslant s z' h_2 \leqslant t h_2$.

Пусть $x \in X$ и

$$X_x = \{y \in X \mid x \text{ сравним с } y \text{ по отношению } \leqslant\}.$$

Предположим, что $s \in S$. Через s_y $(y \in X_x)$ обозначим элемент $s z h_y$, где z — такой элемент $\mathcal{H}_1$, что h_x сравним с $z h_y$. По доказанному выше замечанию элемент s_y строится однозначно. Тогда для любых $x, y \in X$ и $s, t \in S$ выполняется условие 1) теоремы 1.3, т. е. ${}_SA$ — частично упорядоченный полигон, свободный над частично упорядоченным множеством X.

Обратно. Пусть ${}_SA$ — частично упорядоченный полигон, свободный над частично упорядоченным множеством X. Покажем, что ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r^{\ll}}$. Ясно, что ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r}$. По теореме 1.3 ${}_SA = \coprod\limits_{x\in X} {}_SSx$, где ${}_SSx$ — копии частично упорядоченного полигона ${}_SS$. Как и в теореме 1.3, через s_x обозначим копии элементов $s \in S$ для любого $x \in X$. Тогда условие 1) теоремы 1.3 выполняется.

Пусть $\rho = (s,t)$ и $i \in \{1,2\}$. Так как ${}_SS \models \Phi_r(\rho)$, то ${}_SA \models \Phi_r(\rho)$.

Покажем, что ${}_SA \models \Phi_{L_i}(\rho)$. Пусть $sk1_x \leqslant tl1_y$ и при $i = 2$ либо $sk \notin tS$, либо $tl \notin sS$, где $x, y \in X$. По теореме 1.3 $x \leqslant y$ и $sk \leqslant tl$. По условию 2) в частично упорядоченном множестве ${}_SS$ существует максимальный элемент $r \in S$, такой что $k \leqslant r$, $sr \leqslant tl$ и при $i = 2$ либо $sr \notin tS$, либо $tl \notin sS$. Тогда $\langle r,l\rangle \in L_i(\rho)$, и по условию 4) теоремы $\langle r,l\rangle = \langle x^0,y^0\rangle w$ для некоторых $w \in S$ и $\langle x^0,y^0\rangle \in L^i_\rho$. Следовательно, $k1_x \leqslant k1_y \leqslant r1_y$, $\langle r1_y, l1_y\rangle = \langle x^0,y^0\rangle w1_y$ и при $i = 2$ либо $sr \notin tS$, либо $tl \notin sS$. Соотношение ${}_SA \models \Phi_{L_i}(\rho)$ доказано.

Покажем, что ${}_SA \models \Phi_{L_3}(s)$, где $s \in \mathcal{H}_1$. Пусть $k1_x \leqslant l1_y$ и $k1_x \leqslant sl1_y$ для некоторых $k, l \in S$, $x, y \in X$. По теореме 1.3 $x \leqslant y$, $k \leqslant l$ и $k \leqslant sl$. По условию 2) в частично упорядоченном множестве ${}_SS$ существует максимальный элемент $r \in S$, такой что $k \leqslant r$, $r \leqslant l$ и $r \leqslant sl$. Тогда $\langle r,l\rangle \in L_3(s)$, и по условию 5) теоремы $\langle r,l\rangle = \langle x^0,y^0\rangle w$ для некоторых $w \in S$ и $\langle x^0,y^0\rangle \in L^3_s$. Следовательно, $k1_x \leqslant k1_y \leqslant r1_y$, $\langle r1_y, l1_y\rangle = \langle x^0,y^0\rangle w1_y$. Соотношение ${}_SA \models \Phi_{L_3}(s)$ доказано.

Таким образом, ${}_SA$ является свободным частично упорядоченным полигоном над частично упорядоченным множеством X тогда и только тогда, когда ${}_SA \models \Sigma_{\mathcal{F}r^{\ll}}$. Следовательно, класс $\mathcal{F}r^{\ll}$ аксиоматизируем. □

Литература

[1] Габриэль П., Цисман М. Категории частных и теория гомологий. — М.: Мир, 1971.

[2] Гоулд В., Михалёв А. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских S-полигонов // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 63—110.

[3] Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[4] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1971.

[5] Первухин М. А., Степанова А. А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов частично упорядоченных полигонов // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 1. — С. 54—71.

[6] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов S-полигонов // Алгебра и логика. — 1991. — Т. 3, № 5. — С. 583—594.

[7] Bulman-Fleming S., Gould V. Axiomatisability of weakly flat, flat and projective S-sets // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 5575—5593.

[8] Fountain J. B. Perfect semigroups // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1976. — Vol. 20. — P. 87—93.

[9] Gould V. Axiomatisability problems for S-systems // J. London Math. Soc. — 1987. — Vol. 35, no. 2. — P. 193—201.

[10] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[11] Knauer U. Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids // Semigroup Forum. — 1972. — Vol. 3. — P. 359-370.

[12] Shi X. Strongly flat and po-flat S-posets // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33. — P. 4515—4531.

[13] Shi X., Liu Z., Wang F., Bulman-Fleming S. Indecomposable, projective and flat S-posets // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33. — P. 235—251.

[14] Stenström B. Flatness and localization over monoids // Math. Nachr. — 1971. — Vol. 48. — P. 315—334.