**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 2017**

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО ШАРА

Е.В. МУРАШКИН[1,2,3,*], Е.П. ДАЦ[4]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
[2]Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва
[3]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва
[4]Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток
**e-mail: murashkin@ipmnet.ru*

В рамках теории малых упругопластических деформаций рассматривается задача о центрально-симметричном деформировании многослойного упругопластического шара при последовательном присоединении к его внешней поверхности предварительно разогретых слоев. Решены задачи о формировании остаточных напряжений в упругопластическом шаре с включением и полостью при различных механических граничных условиях на внутренней поверхности и заданных распределениях деформации теплового сжатия. Построены графики полей остаточных напряжений и перемещений.

Ключевые слова: упругость, пластичность, температурные напряжения, остаточные деформации, остаточные напряжения, теплопроводность.

Введение. Исследование напряженно-деформированного состояния многослойных (составных) конструкций обусловлено насущной потребностью в совершенствовании технологий изготовления изделий, обладающих заданными прочностными и функциональными характеристиками. Изучение в таких процессах влияния температурных эффектов естественным образом позволяет учесть особенности формирования остаточных напряжений и деформаций, существенным образом накладывающих определенные ограничения на функционирование и долговечность конструкций. Одним из примеров использования эффектов теплового расширения материала в составных телах, обладающих осевой симметрией являются задачи, посвященные расчету технологической операции горячей посадки [1–5]. Очевидно, что учет пластических свойств материала в данном случае позволяет более достоверно рассчитать уровень контактного давления, отвечающего за уровень прочности итогового изделия. Учет влияния начального теплового расширения имеет определяющее значение при формировании остаточных напряжений и деформаций, и, как следствие, прочностных характеристик изготавливаемого изделия [7–11].

Процесс присоединения новых частей материала может рассматриваться как процесс дискретного наращивания материала, используемый в технологии аддитивного изготовления изделий произвольной формы. В качестве теоретической основы для решения подобного рода задач должна выступать механика наращиваемых деформируемых тел [15–17]. В работах [18–20] решены краевые задачи о наращивании тяжелых вязкоупругих тел при учете гравитационных сил. В работе [21] исследовано тепловое состояние растущего вязкоупругого шара.

В представленной работе рассматриваются задачи определения остаточных напряжений и деформаций в слоистых изделиях в условиях сферической симметрии при учете термопластических свойств материала.

1. Деформирование сферического слоя на жестком включении.

1.1. Термоупругое равновесие. Рассмотрим задачу о центрально-симметричном деформировании многослойного термоупругого шара. Пусть имеется жесткое сферическое включение радиуса R_0 и температуры T_0, к поверхности которого присоединяется сферический слой из термоупругого материала, имеющий размеры R_0, R_1 и начальную температуру $T_k > T_0$. Полагая, что размер сферического слоя значительно меньше размера сферического включения $R_1 - R_0 / R_0 << 1$, будем пренебрегать процессом теплопроводности, возникающим при теплопередаче, и считать, что температура слоя T_k равномерно уменьшается до значения T_0 в течение бесконечно малого временного интервала. Таким образом формируется шар размера R_1.

В рамках теории малых деформаций запишем зависимости между ненулевыми компонентами тензора d_{ij} деформаций и радиальной компоненты вектора перемещений u_r в условиях сферической симметрии

$$d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = \partial u_r / \partial r, \qquad d_{\phi\phi} = d_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} + p_{\phi\phi} = u_r / r \tag{1.1}$$

e_{ij} – термоупругие (обратимые) деформации, p_{ij} – пластические (необратимые) деформации. Для случая термоупругого равновесия далее предполагается отсутствие в материале пластических деформаций $p_{ij} = 0$.

На внутренней контактной поверхности выполняется условие отсутствие радиального перемещения $u_r(R_0) = 0$, в результате чего, ограничение на свободное тепловое сжатие материала сферического слоя при остывании приводит к формированию остаточных напряжений. На поверхности R_1 задано условие свободного теплового сжатия $\sigma_{rr}(R_1) = 0$. Постановка задачи позволяет рассматривать процесс дискретного наращивания шара в рамках теории составных тел.

Соотношения между ненулевыми компонентами тензора напряжений и термоупругих деформаций в условиях сферической симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)e_{rr} + 2\lambda e_{\phi\phi} + q\Delta \\ \sigma_{\phi\phi} &= \sigma_{\theta\theta} = 2(\lambda + \mu)e_{\phi\phi} + \lambda e_{rr} + q\Delta \end{aligned} \tag{1.2}$$

где λ, μ – константы Ламе, $q = (3\lambda + 2\mu)$. Для функции линейного теплового расширения выбрана зависимость $\Delta = \alpha(T_k - T)$, где α – коэффициент линейного теплового расширения; T изменяется от T_k до T_0, таким образом вводится предположение, что в предварительно нагретом слое свободном от внешних воздействий, отсутствуют начальные деформации.

Воспользовавшись соотношениями (1.2), системой уравнений равновесия и совместности деформаций

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi})}{r} = 0, \qquad \frac{\partial d_{\phi\phi}}{\partial r} + \frac{d_{\phi\phi} - d_{rr}}{r} = 0 \tag{1.3}$$

получим решение для напряжений и перемещений при термоупругом деформировании шара

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^3}, \qquad \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^3}, \qquad u_r = -r\Delta + \frac{rA}{q} - \frac{B}{4\mu r^2} \tag{1.4}$$

Константы интегрирования A, B определяются из граничных условий задачи и имеют вид

$$A = \frac{4q\mu R_0^3\Delta}{4\mu R_0^3 + qR_1^3}, \qquad B = -\frac{2q\mu R_0^3 R_1^3\Delta}{4\mu R_0^3 + qR_1^3} \tag{1.5}$$

1.2. Пластическое течение сферического слоя. Рассмотрим формирование процесса необратимого деформирования в слое при учете пластических свойств материала. В условиях сферической симметрии в качестве пластического потенциала используется условие

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} = 2sk \tag{1.6}$$

где k — предел текучести материала, $s = \mathrm{sgn}(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi})$ — знак перед пределом текучести, определяемый по напряжениям перед началом пластического течения. Выполнение условия (1.6) означает переход материала в пластическое состояние. Впервые условие (1.6) выполняется на поверхности $r = R_0$. Граница течения m движется в направлении внешней поверхности по мере выравнивания температурного поля. В области течения $R_0 < r < m$ напряжения определяются из системы уравнений (1.3), (1.6) и имеют вид

$$\sigma_{rr} = F - 4sk\ln(r), \qquad \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} = F - 4sk\ln(r) - 2sk \tag{1.7}$$

Для радиальной компоненты вектора перемещений, исходя из условия пластической несжимаемости материала, получим решение в области течения

$$u_r = r\left(\frac{F}{q} - \Delta\right) + \frac{G}{r^2} - \frac{4sk}{q} r\ln(r) \tag{1.8}$$

Константы интегрирования F, G, присутствующие в записи соотношений (1.7), (1.8) наряду с константами A, B определяются исходя из граничных условий на поверхностях R_0, R_1 и условий непрерывности радиальных компонент тензора напряжений и вектора перемещений

$$A = \frac{16skm^3R_0^3\ln(R_0\,/\,m) + 4\mu qm^3R_0^3\Delta}{m^3(4\mu R_0^3 + 3qR_1^3) - 4\mu R_0^3R_1^3}, \quad B = -\frac{16skm^3R_0^3R_1^3\ln(R_0\,/\,m) + 4\mu qm^3R_0^3R_1^3\Delta}{m^3(4\mu R_0^3 + 3qR_1^3) - 4\mu R_0^3R_1^3}$$

$$F = \frac{12skm^3R_1^3\ln(m)(\lambda + 2\mu)}{m^3(4\mu R_0^3 + 3qR_1^3) - 4\mu R_0^3R_1^3} - \frac{4R_0^3(R_1^3 - m^3)\mu(4sk\ln(R_0) + q\Delta)}{m^3(4\mu R_0^3 + 3qR_1^3) - 4\mu R_0^3R_1^3} \tag{1.9}$$

$$G = \frac{12\mu skm^3R_0^3R_1^3\ln(R_0\,/\,m)}{\omega(m^3(4\mu R_0^3 + 3qR_1^3) - 4\mu R_0^3R_1^3)} + \frac{3(\lambda + 2\mu)m^3R_0^3R_1^3\Delta}{m^3(4\mu R_0^3 + 3qR_1^3) - 4\mu R_0^3R_1^3}$$

Положение упругопластической границы m можно найти из условия непрерывности на ней окружных напряжений.

1.3. Многократное присоединение сферических слоев. Рассмотрим процесс последовательного присоединения к формирующемуся шару очередного i-го слоя. В дальнейшем индексом i так же будем обозначать принадлежность рассматриваемых величин к определенному слою, в частности каждый слой имеет размеры $R_{i-1} < r < R_i$. Количество слоев задано значением n, а величины $R_0 < r < R_{\mathrm{n}}$ определяют конечный размер изделия. Для функций напряжений и перемещений в условиях обратимого деформирования материала и при одинаковом начальном нагреве каждого слоя примем следующие зависимости

$$\sigma_{rr}(i) = A(i) + \frac{B(i)}{r^3}, \qquad \sigma_{\phi\phi}(i) = A(i) - \frac{B(i)}{r^3}, \qquad u_r = -r\Delta + \frac{rA(\mathrm{i})}{q} - \frac{B(i)}{4\mu r^2} \tag{1.10}$$

Соотношения (1.10) содержат $2n$ неизвестных констант интегрирования, определяемых из системы уравнений, заданной в виде граничных условий задачи и условий непрерывности радиальных компонент тензора напряжений и вектора перемещений на контактных поверхностях: $\sigma_{rr}(i,R_i)=\sigma_{rr}(i+1,R_i)$, $u_r(i,R_i)=u_r(i+1,R_i)$, $u_r(1,R_0)=0$, $\sigma_{rr}(n,R_n)=0$.

Решение для констант интегрирования совпадает с ранее полученным (1.5). Таким образом, напряженно-деформированное состояние материала формирующегося шара при одинаковом предварительном нагреве каждого слоя не зависит от количества и способа разбиения и определяется степенью теплового сжатия и итоговым размером материала. При учете пластического течения данный факт означает, что каждый новый присоединенный слой увеличивает область необратимого деформирования и уровень накопленных необратимых деформаций.

2. Деформирование многослойного полого упругопластического шара.

2.1. Термоупругое равновесие. Процесс формирования напряжений в материале происходит, как при ограничениях на свободное тепловое расширение/сжатие, так и при влиянии теплового градиента. Пусть имеется упругопластический шар со свободными граничными поверхностями $\sigma_{rr}(R_0)=0$, $\sigma_{rr}(R_\text{n})=0$. В случае термоупругого деформирования материала при равномерном температурном распределении применение данных граничных условий приводит к равенству констант интегрирования нулю. Таким образом, в условиях отсутствия ограничений на свободное изменение размера вследствие равномерного теплового воздействия не происходит изменения напряженного состояния материала. В этом случае для формирования остаточных напряжений необходимо осуществить разную степень начального нагрева отдельных сферических слоев. Наряду с константами интегрирования, относящимися к определенному слою введем функцию теплового сжатия $\Delta_i=\alpha(T_i-T_0)$, где T_i – начальная температура каждого слоя, T_0 – установившаяся температура в материале шара. При произвольном размере каждого слоя, в условиях непрерывности радиальных напряжений и перемещений на контактных поверхностях получим систему решений для неизвестных констант интегрирования в случае термоупругого равновесия материала:

$$
\begin{aligned}
A(i)&=\frac{4\omega}{3(R_0^3-R_n^3)}\left(R_n^3(\Delta_n-\Delta_i)-R_0^3(\Delta_1-\Delta_i)-\sum_{j=1}^{n-1}R_j^3(\Delta_{j+1}-\Delta_j)\right)\\
B(i)&=\frac{4\omega}{3(R_0^3-R_n^3)}\left(R_n^3\sum_{j=1}^{i-1}R_j^3(\Delta_{j+1}-\Delta_j)+R_0^3\sum_{j=i}^{n-1}R_j^3(\Delta_{j+1}-\Delta_j)+R_0^3R_n^3(\Delta_1-\Delta_n)\right)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Пусть дискретное распределение Δ_i можно аппроксимировать непрерывно дифференцируемой функцией $\Delta(r)$, тогда при $(\Delta_{j+1}-\Delta_j)\to 0$, из (2.1) получим соотношения для констант интегрирования в случае непрерывного наращивания материала:

$$
\begin{aligned}
A(r)&=\frac{4\omega}{3(R_0^3-R_n^3)}\left(R_n^3(\Delta(R_n)-\Delta(r))-R_0^3(\Delta(R_0)-\Delta(r))-\int_{R_0}^{R_n}\frac{\partial\Delta(\rho)}{\partial\rho}\rho^3\,d\rho\right)\\
B(r)&=\frac{4\omega}{3(R_0^3-R_n^3)}\left(R_n^3\int_{R_0}^{r}\frac{\partial\Delta(\rho)}{\partial\rho}\rho^3\,d\rho+R_0^3\int_{r}^{R_n}\frac{\partial\Delta(\rho)}{\partial\rho}\rho^3\,d\rho+R_0^3R_n^3(\Delta(R_0)-\Delta(R_n))\right)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

2.1 Пластическое течение двуслойного полого шара. Несовместные тепловые деформации материала шара приводят к возникновению разрыва окружных напряжений на контактных поверхностях. Рост абсолютной разницы между радиальным и окружным напряжением в каждом слое может сопровождаться возникновением пластического течения на внутренней поверхности. Рассмотрим задачу сопряжения двух упругопластических слоев $n = 2$, находящихся при разных начальных температурах T_1, T_2. При контакте происходит выравнивание температуры до значения T_0, в результате чего формируется двухслойный полый упругопластический шар с теплоизолированными поверхностями $R_0 < r < R_2$, материал которого имеет распределения остаточных напряжений и деформаций. Начальный уровень температурного градиента на контактной поверхности $r = R_1$, а также размеры определяют возможность и последовательность появления и развития пластических течений на внутренних поверхностях обоих слоев.

Пусть начальные условия задачи позволяют рассчитать параметры процесса пластического течения на обеих внутренних поверхностях. Тогда во внутреннем слое $i = 1$ существует область необратимого деформирования $R_0 < r < m_1$ и область обратимого деформирования $m_1 < r < R_1$; во внешнем слое $i = 2$ существует область необратимого деформирования $R_1 < r < m_2$ и область обратимого деформирования $m_2 < r < R_2$. Здесь $r = m_{\mathrm{i}}$ – упругопластические границы, положение которых необходимо вычислить. На контактной поверхности выполняются условия идеального теплового контакта и непрерывности радиальных компонент напряжений и перемещений. Установившаяся температура $T = T_0$ при одинаковом материале слоев вычисляется через известное уравнение теплового баланса

$$T_0 = \frac{T_1V_1 + T_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{T_1(R_1^3 - R_0^3) + T_2(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)} \tag{2.3}$$

где V_{i} – объем соответствующего слоя. Соотношения для напряжений и перемещений в каждой из областей обратимого деформирования заданы ранее найденными зависимостями (1.4) с учетом констант интегрирования, которые определим (с точностью до неизвестных упругопластических границ) из граничных условий и условий непрерывности радиальных напряжений и перемещений на упругопластических границах и границе контакта согласно соотношениям

$$\begin{gathered}
A(1) = 4skW\left(\ln\left(\frac{m_1}{R_0}\right)\left(\frac{1}{R_2^3} + \frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{m_2^3}\right) - \frac{1}{m_1^3}\ln\left(\frac{m_2}{R_1}\right) + \frac{\omega R_1^3(R_2^3 - m_2^3)(\Delta_2 - \Delta_1)}{3skm_2^3m_1^3R_2^3}\right) \\
A(2) = \frac{4skW}{m_1^3}\left(\frac{\omega}{3sk}(m_1^3 - R_1^3)(\Delta_2 - \Delta_1) - \ln\left(\frac{m_1}{R_0}\right) - \ln\left(\frac{m_2}{R_1}\right)\right) \\
B(1) = 4skW\left(\ln\left(\frac{m_1}{R_0}\right) + \ln\left(\frac{m_2}{R_1}\right) - \frac{\omega R_1^3(R_2^3 - m_2^3)(\Delta_2 - \Delta_1)}{3skm_2^3R_2^3}\right) \\
B(2) = 4skW\left(\ln\left(\frac{m_1}{R_0}\right) + \ln\left(\frac{m_2}{R_1}\right) + \frac{\omega(R_2^3 - m_2^3)(\Delta_2 - \Delta_1)}{3skm_1^3}\right) \\
W = \left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{R_i^3}\prod_{j=1}^{2}m_j^3R_j^3 - \frac{1}{m_i^3}\prod_{j=1}^{2}m_j^3R_j^3\right)\right)^{-1}\prod_{j=1}^{2}m_j^3R_j^3
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Соотношения для напряжений и перемещений в каждой из областей пластического течения заданы ранее найденными зависимостями (1.7), (1.8) с учетом констант интегрирования, которые в рамках поставленной задачи запишутся в форме

$$F(1) = 4sk\ln(R_0)$$

$$F(2) = 4skW\left(\ln(m_2)\left(\frac{1}{R_1^{/3}} - \frac{1}{m_1^3}\right) - \ln\left(\frac{m_1}{R_0R_1}\right)\left(\frac{1}{m_2^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) + \frac{\omega(R_1^3 - m_1^3)(R_2^3 - m_2^3)(\Delta_2 - \Delta_1)}{3skm_1^3m_2^3R_1^3R_2^3}\right)$$

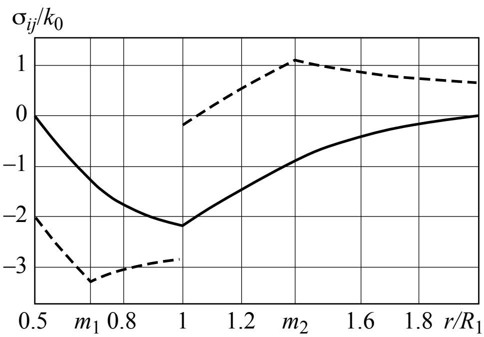
$$G(1) = 3skW\omega\left(\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{m_2^3}\right)\frac{R_1^3(\Delta_2 - \Delta_1)}{3sk\omega} - \ln(m_2) - \ln\left(\frac{m_1}{R_0R_1}\right)\right) \quad (2.5)$$

$$G(2) = 3skW\omega\left(\left(1 - \frac{R_1^3}{m_1^3}\right)\frac{(\Delta_2 - \Delta_1)}{3sk\omega} - \ln(m_2) - \ln\left(\frac{m_1}{R_0R_1}\right)\right)$$

Положение упругопластических границ вычисляется при помощи численного решения системы уравнений, задающих на границах непрерывность окружных напряжений

$$A(i) - B(i) / m_i^3 = F(i) - 4sk\ln(m_i) - 2sk \quad (2.6)$$

Установившаяся температура в материале шара приводит к возникновению состояния нейтрального нагружения, когда в областях течения выполняется условие пластичности, при этом границы течения сохраняют свои положения. На фигуре представлены поля радиальных (сплошная линия) и окружных (пунктирная линия) напряжений после выравнивания температуры изделия. В качестве особенности напряженно-деформированного состояния слоев, выполненных из одинакового материала, укажем следующее: при выравнивании температурного поля происходит сохранение напряженного состояния материала в случае дальнейшего равномерного изменения температуры. Сформированные распределения напряжений не претерпевают изменений в том случае, если не возникает температурных градиентов, например, при постепенном остывании. Таким образом, напряжения, вызванные выравниванием температурного поля, могут рассматриваться в качестве остаточных.



Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 17-19-01257).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *H. Lippmann*, The Effect of a Temperature Cycle on the Stress Distribution in a Shrink Fit // Int. J. of Plasticity. 1992. V. 8. P. 567–582.
2. *W. Mack*, Thermal Assembly of an Elastic-Plastic Hub and a Solid Shaft // Arch. of App. Mech. 1993. V. 63. P. 42–50.
3. *A. Kovacs*, Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits // Periodica Polytechnica: Mech. Eng. 1996. V. 40. P. 103–112.
4. *Е.П. Дац, А.В. Ткачева, Р.В. Шпорт*, Сборка конструкции «кольцо в кольце» способом горячей посадки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4. С. 225–235.

5. *Е.П. Дац, А.В. Ткачева*, Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 208–216.
6. *Е.П. Дац, С.Н. Мокрин, Е.В. Мурашкин*, Расчет накопленной остаточной деформации в процессе «нагрева-охлаждения» упругопластического шара // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния 2012. № 4. С. 123–132.
7. *А.А. Буренин, Е.П. Дац, С.Н. Мокрин, Е.В. Мурашкин*, Пластическое течение и разгрузка полого цилиндра в процессе «нагрева-охлаждения» // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2. С. 22–28.
8. *А.А. Буренин, Е.П. Дац, Е.В. Мурашкин*, Формирование поля остаточных напряжений в условиях локального теплового воздействия // Изв. РАН. МТТ. 2014. Т .49. № 2. С. 124–131.
9. *Е.П. Дац, Е.В. Мурашкин, Р. Велмуруган*, Вычисление необратимых деформаций в полом упругопластическом шаре в условиях нестационарного температурного воздействия // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 3. С. 168–175.
10. *E. Dats, S. Mokrin, E. Murashkin*, Calculation of the Residual Stresses of Hollow Cylinder under Unsteady Thermal Action // Lecture notes in engineering and computer science. 2015. V. 2218. P. 1043–1046.
11. *E. Dats, E. Murashkin*, On Unsteady Heat Effect in Center of the Elastic-Plastic Disk // Lecture notes in engineering and computer science. 2016. V. 2223. P. 69–72.
12. *E. Dats, S. Mokrin, E. Murashkin*. Calculation of the Residual Stress Field of the Thin Circular Plate under Unsteady Thermal Action // KEM. 2016. V. 685. P. 37–41.
13. *E. Dats, E. Murashkin, N. Stadnik*. On Heating of Thin Circular Elastic-plastic Plate with the Yield Stress Depending on Temperature // Procedia Engineering. 2017. V. 173. P. 891–896.
14. *E. Dats, E. Murashkin, N. Stadnik*. On a Multi-Physics Modelling Framework for Thermo-elastic-plastic Materials Processing // Procedia Manufacturing. 2017. V. 7 P. 427–434.
15. *A.V. Manzhirov*, Mechanical Design of Viscoelastic Parts Fabricated Using Additive Manufacturing Technologies // Lecture Notes in Engineering and Computer Science. 2015. V. 2218(1.1). P. 710–714.
16. *A.V. Manzhirov* Advances in the Theory of Surface Growth with Applications to Additive Manufacturing Technologies // Procedia Engineering. 2017. V. 173. P. 11–16.
17. *A.V. Manzhirov* Mechanical Design of AM Fabricated Prismatic Rods under Torsion // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences. 2017. V. 95. P. 12002.
18. *А.В. Манжиров, Д.А. Паршин*, Наращивание вязкоупругого шара в центрально-симметричном силовом поле // Изв. РАН. МТТ. 2006. N1. С. 66–83.
19. *А.В. Манжиров, Д.А. Паршин*, Возведение арочной конструкции с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Изв. РАН. МТТ. 2015. N5. С. 94–107.
20. *А.В. Манжиров, Д.А. Паршин*, Влияние режима возведения на напряженное состояние вязкоупругой арочной конструкции, возводимой с использованием аддитивной технологии под действием силы тяжести // Изв. РАН. МТТ. 2015. N6. С. 69–91.
21. *С.И. Кузнецов, А.В. Манжиров, И. Федотов*, Задача теплопроводности для растущего шара // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 139–148.

Поступила в редакцию
8.06.2017