УДК 539.374

ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ЕГО НАГРЕВЕ ВСЛЕДСТВИЕ ПРИСТЕННОГО ТРЕНИЯ

А. С. Бегун[*,**], Л. В. Ковтанюк[*]

[*] Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток, Россия
[**] Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, 690014 Владивосток, Россия
E-mails: asustinova@mail.ru, lk@iacp.dvo.ru

С использованием математической модели больших деформаций решается связанная краевая задача о деформировании упруговязкопластического материала в цилиндрическом вискозиметре с учетом его нагрева за счет пристенного трения. Исследуется деформирование материала, заключенного между жесткими поверхностями, вследствие вращения внутренней цилиндрической поверхности с переменной скоростью. Учитывается, что предел текучести зависит от температуры. Выявлены закономерности движения упругопластических границ, рассчитаны напряжения, деформации, температура в области термоупругого деформирования и в области течения как при развитии течения, так и при его замедлении, включая остановку, разгрузку и охлаждение, вычислены остаточные напряжения и деформации.

Ключевые слова: упругость, вязкость, пластичность, вискозиметрическое течение, большие деформации, термопластичность.

DOI: 10.15372/PMTF20210509

Результаты вискозиметрических экспериментов могут использоваться для измерения вязкости конструкционных материалов. Обработка этих результатов обычно проводится с помощью точного решения соответствующей модельной краевой задачи. В механике вязких и вязкопластических сред такие решения, полученные в рамках жесткопластической модели Шведова — Бингама, являются классическими [1–4], также разработаны достаточно универсальные методы расчетов вязкопластических течений [5–7]. При использовании конструкционных материалов или эластичных жидкостей, когда упругими свойствами материалов пренебречь невозможно, задачи о вискозиметрических течениях существенно усложняются. В таких случаях деформации в застойных зонах и движущихся ядрах преимущественно обратимы, и постановку краевых задач необходимо осуществлять в перемещениях, в то время как в областях течения задача решается в скоростях перемещений. Области обратимого деформирования и течения разделяются неизвестной движущейся границей, на которой должно выполняться условие непрерывности перемещений. Вычисление компонент перемещений в областях течения является достаточно сложной задачей [8], поэтому решений упругопластических задач в теории течения получено немного [9, 10]. Заметим, что в случае упруговязкопластических сред условия равенства скоростей и компонент напряжений на упругопластической границе также недостаточно, что может приводить к ошибочным решениям [11].

Поскольку в областях течения необратимые деформации велики, задачи о вискозиметрическом течении необходимо рассматривать с использованием модели больших упругопластических деформаций. Подобных подходов к моделированию упругопластических свойств существует достаточно много [12–17]. В настоящей работе будем использовать модель, в которой в соответствии с законами неравновесной термодинамики обратимые и необратимые деформации, рассматриваемые в качестве термодинамических параметров состояния, определяются из дифференциальных уравнений переноса [18–21].

С помощью данного подхода получены решения некоторых теоретических задач (включая точные аналитические) [21–25].

Обобщим решение, полученное в работе [25], в которой рассматривалось вязкопластическое течение с учетом проскальзывания на стенках вискозиметра. В предположении, что наличие трения при проскальзывании приводит к нагреву деформируемого материала, рассмотрим связанную задачу производства тепла и необратимых деформаций за счет вискозиметрического деформирования и пристенного трения. Решение задачи проведем с использованием математической модели больших упругопластических деформаций, построенной в [18–20], подробно описанной в [21] и обобщенной на неизотермический случай [26] и на случай учета вязких свойств материала при его пластическом течении [27]. В рамках такой математической модели ранее получены решения связанных термомеханических задач для случаев прямолинейных движений упруговязкопластических материалов [28–31].

1. Основные соотношения модели. Обратимая (термоупругая) m и необратимая p составляющие полных деформаций определяются дифференциальными уравнениями их изменения (переноса). В переменных Эйлера такие соотношения имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{Dp}{Dt}=\frac{dp}{dt}-x\cdot p+p\cdot x=\gamma-p\cdot\gamma-\gamma\cdot p,\\ \frac{Dm}{Dt}=\varepsilon-\gamma-\frac{1}{2}\left((\varepsilon-\gamma+z)\cdot m+m\cdot(\varepsilon-\gamma-z)\right),\end{gathered}\tag{1.1}$$

где

$$x=-x^{\mathrm{т}}=w+z,\quad \varepsilon=\frac{1}{2}\,(\nabla\boldsymbol{v}+\nabla^{\mathrm{т}}\boldsymbol{v}),\quad w=\frac{1}{2}\,(\nabla\boldsymbol{v}-\nabla^{\mathrm{т}}\boldsymbol{v}),\quad \boldsymbol{v}=\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{u},$$

$$m=e+\alpha T_0\theta I,\qquad \theta=T_0^{-1}(T-T_0),$$

$$z=-z^{\mathrm{т}}=A^{-1}(B^2(\varepsilon\cdot m-m\cdot\varepsilon)+B(\varepsilon\cdot m^2-m^2\cdot\varepsilon)+m\cdot\varepsilon\cdot m^2-m^2\cdot\varepsilon\cdot m),\tag{1.2}$$

$$A=8-8J_1+3J_1^2-J_2-J_1^3/3+J_3/3,\qquad B=2-J_1,$$

$$J_1=I\cdot m,\qquad J_2=I\cdot m^2,\qquad J_3=I\cdot m^3,$$

$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ — векторы перемещений и скорости; I — единичный тензор второго ранга; T, T_0 — текущая температура и температура в свободном состоянии (комнатная температура) соответственно; α — коэффициент линейного расширения; D/Dt — объективная производная по времени. В качестве термодинамических параметров состояния тела при его деформировании принимаем температуру T (или плотность распределения энтропии S), обратимые (термоупругие) m и необратимые p деформации. Согласно первому уравнению (1.1) процессы деформирования, в которых необратимые деформации p неизменны, определяются равенством нулю источника необратимых деформаций γ. В этом случае $Dp/Dt = 0$ и компоненты тензора необратимых деформаций p изменяются так же, как при жестком перемещении тела. Введенная в соотношении (1.1) объективная производная совпадает с производной Яумана в случае равенства нулю нелинейной добавки: $z(\varepsilon, m) = 0$.

Для тензора полных деформаций Альманси d из (1.1), (1.2) получаем [21]

$$d = m + p - m \cdot m/2 - m \cdot p - p \cdot m + m \cdot p \cdot m. \tag{1.3}$$

В качестве термодинамического потенциала будем использовать свободную энергию $\Phi(m, T) = E(d, S) - TS$ ($E(d, S)$ — плотность распределения внутренней энергии). Принимая существенно упрощающую математическую модель гипотезу, согласно которой свободная энергия не зависит от необратимых деформаций, будем полагать, что консервативная часть процесса деформирования задается упругим потенциалом $W(m, \theta) = \rho_0 \Phi(m, T)$ (ρ_0 — плотность материала в свободном состоянии). Полагая материал механически несжимаемым, из закона сохранения энергии получаем формулу Мурнагана и уравнение баланса энтропии

$$\sigma = -pI + \frac{1}{1 + 3\alpha T_0 \theta} \frac{\partial W}{\partial m} \cdot (I - m); \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial (\rho S)}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{J} - T^{-2} \boldsymbol{q} \cdot \nabla T + T^{-1} \sigma \cdot \gamma, \tag{1.5}$$

где p — неизвестное гидростатическое давление; $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{J}$ — векторы потока тепла и энтропии:

$$\boldsymbol{J} = \rho S \boldsymbol{v} - T^{-1} \boldsymbol{q}, \qquad S = -T_0 \rho^{-1} \frac{\partial W}{\partial \theta}.$$

Для рассматриваемого случая изотропной среды упругий потенциал $W(J_1, J_2, \theta)$ раскладывается в ряд Тейлора относительно свободного состояния деформируемого материала при комнатной температуре T_0:

$$\begin{gathered} W(J_1, J_2, \theta) = -2\mu J_1 - \mu J_2 + \varkappa J_1^2 + (\varkappa - \mu) J_1 J_2 - \chi J_1^3 + \nu_1 J_1 \theta + \\ + \nu_2 \theta^2 - \nu_3 J_1 \theta^2 - \nu_4 J_1^2 \theta - \nu_5 J_2 \theta - \nu_6 \theta^3 + \ldots, \\ J_1 = I \cdot c, \qquad J_2 = I \cdot c^2, \qquad c = m - 0{,}5 m^2. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь μ — модуль сдвига; $\varkappa$, χ — модули упругости более высокого порядка; ν_k ($k = 1, 2, \ldots, 6$) — термомеханические постоянные.

Подставляя (1.6) в (1.5), уравнение теплопроводности запишем в виде

$$\begin{gathered} (1 + \beta_1 \theta + \beta_2 J_1) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta_3 (\varepsilon - \gamma) \cdot c = \lambda \Delta \theta - \frac{1}{2\nu_2} \sigma \cdot \gamma, \\ \beta_1 = \frac{(1 - 3\alpha T_0)\nu_2 - 3\nu_6}{\nu_2}, \qquad \beta_2 = -\frac{\nu_3}{\nu_2}, \qquad \beta_3 = -\frac{\nu_1 + \nu_5}{\nu_2} \end{gathered} \tag{1.7}$$

(λ — температуропроводность). При деформировании, предшествующем вязкопластическому течению, и при разгрузке в (1.7) полагаем $\gamma = 0$. Таким образом, производством необратимых деформаций на данных стадиях процесса деформирования в форме деформаций ползучести пренебрегается. В области течения $\gamma = \varepsilon^p$, т. е. источниковый член в уравнении переноса (1.1) совпадает с тензором скоростей пластических деформаций.

Поверхность нагружения задается условием пластичности Треска с учетом вязкого сопротивления пластическому течению [32]:

$$f(\sigma_i, \varepsilon_k^p, k) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k - 2\eta \max |\varepsilon_k^p|, \tag{1.8}$$

где σ_i, ε_k^p — главные значения тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций; k — предел текучести; η — вязкость.

Зависимость предела текучести от температуры примем в виде [28–31]

$$k = k_0(1 - \theta^2/\theta_m^2), \qquad \theta_m = (T_m - T_0)T_0^{-1}, \tag{1.9}$$

где T_m — температура плавления деформируемого материала; k_0 — предел текучести материала при комнатной температуре. Скорости необратимых (пластических) деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon^p = \gamma = \varphi\,\frac{\partial f(\sigma,\gamma,k)}{\partial\sigma}, \qquad \varphi > 0. \tag{1.10}$$

Дополняя соотношения (1.7)–(1.10) уравнениями равновесия $\nabla\sigma = 0$, получаем замкнутую систему уравнений квазистационарного упруговязкопластического деформирования.

2. Постановка задачи. Начальное обратимое деформирование. Пусть упруговязкопластический материал заполняет кольцевой зазор между жесткими цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ $(R > r_0)$. Внутренний цилиндр вращается вокруг своей оси с заданной переменной угловой скоростью $\omega_{r_0}(t)$, тогда как внешний остается неподвижным.

Траекториями точек среды являются концентрические окружности, следовательно, в цилиндрической системе координат (r,φ,z) согласно (1.1)–(1.3) и условию несжимаемости кинематика среды определяется соотношениями

$$\begin{gathered}
u_r = r(1 - \cos\psi(r,t)), \qquad u_\varphi = r\sin\psi(r,t), \qquad u_z = 0,\\
d_{rr} = -\frac{1}{2}\,r^2\Big(\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)^2 = -2g^2, \qquad d_{r\varphi} = \frac{1}{2}\,r\psi_{,r} = g, \qquad \psi_{,r} = \frac{\partial\psi}{\partial r},\\
v_\varphi = r\omega = r\psi_{,rt}, \qquad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial d_{r\varphi}}{\partial t} = \frac{1}{2}\,(v_{\varphi,r} - r^{-1}v_r) = \frac{1}{2}\,r\psi_{rt},\\
w_{r\varphi} = -\psi_{,t} - \frac{r}{2}\,\psi_{,rt}, \qquad x_{r\varphi} = -\psi_{,t} + \frac{2m_{r\varphi}(1 - m_{\varphi\varphi})}{m_{rr} + m_{\varphi\varphi} - 2},
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\psi = \psi(r,t)$ — величина центрального угла закручивания точек среды; $\omega(r,t)$ — их угловая скорость.

Рассмотрим деформирование материала при увеличивающейся, постоянной и уменьшающейся скоростях поворота внутреннего цилиндра. Следовательно, в качестве граничных условий задачи примем соотношения

$$\begin{gathered}
\psi(R,t) = 0, \qquad \omega(R,t) = 0,\\
w_{r_0}(t) = \begin{cases} at, & 0 \leqslant t \leqslant t_1,\\ at_1, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\\ at_1 - b(t - t_2), & t_2 \leqslant t \leqslant t_5,\end{cases}\\
\psi_{r_0} = \begin{cases} at^2/2, & 0 \leqslant t \leqslant t_1,\\ at_1t - at_1^2/2, & t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\\ at_1t - at_1^2/2 - b(t^2 - t_2^2)^2/2, & t_2 \leqslant t \leqslant t_5.\end{cases}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Будем полагать, что до момента начала процесса деформирования $t = 0$ деформации в цилиндрическом слое отсутствуют, температура равна комнатной T_0, первоначальное обжатие является равномерным: $\sigma_{rr}(r,0) = \sigma_{\varphi\varphi}(r,0) = \sigma_{zz}(r,0) = \sigma_0 = \text{const}$. Также будем полагать, что первоначально материал деформируется обратимо, а его контакт с жесткими стенками осуществляется в соответствии с законом сухого трения:

$$|\sigma_{r\varphi}| \leqslant \delta\,|\sigma_{rr}|, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \quad \omega = \boldsymbol{0} \quad \text{при} \quad r = r_0, \quad r = R \tag{2.3}$$

(δ — коэффициент трения покоя).

Согласно (1.4), (1.6) компоненты напряжений при упругом деформировании определяются соотношениями

$$\sigma_{rr} = \sigma_{zz} = -(p + 2\mu) - 2(\varkappa + \mu)g^2 = -\Sigma, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\Sigma + 4\mu g^2, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu g. \tag{2.4}$$

В (2.4) обратимые деформации полагаются настолько малыми, что их третьим порядком можно пренебречь. Для полученных результатов такое допущение непринципиально, однако позволяет существенно упростить расчеты.

Интегрируя уравнения равновесия (квазистатический случай)

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \qquad \sigma_{r\varphi,r} + 2r^{-1}\sigma_{r\varphi} = 0, \tag{2.5}$$

с учетом (2.1), (2.4) получаем решение, справедливое в интервале времени, когда происходит только упругое деформирование материала:

$$\begin{gathered}\sigma_{r\varphi} = \frac{f(t)}{r^2}, \qquad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \frac{f^2}{4\mu}\Big(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{r^4}\Big) + \sigma_0,\\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{f^2}{4\mu}\Big(\frac{1}{r_0^4} - \frac{3}{r^4}\Big) + \sigma_0, \qquad \psi = \frac{f}{2\mu}\Big(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\Big),\\ \omega = \frac{\dot f}{2\mu}\Big(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\Big), \qquad \dot f = \frac{df}{dt}, \qquad f(t) = \frac{a\mu t^2}{R^{-2} - r_0^{-2}}.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Найденное решение справедливо до некоторого момента времени $t = t_0 < t_1$. В момент времени $t = t_0$ в зависимости от значений параметров материала в окрестности внутренней поверхности либо начинается проскальзывание материала, либо возникает вязкопластическое течение. При $\delta\sigma_0 < k_0$ проскальзывание начинается до момента возникновения вязкопластического течения, поэтому начиная с момента времени

$$t = t_0 = \sqrt{\frac{\delta\sigma_0 r_0^2}{a\mu}\Big(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{R^2}\Big)}$$

граничное условие (2.3) при $r = r_0$ необходимо заменить условием

$$|\sigma_{r\varphi}| = \delta\,|\sigma_{rr}| + \xi\,|\omega - \omega_{r_0}| \tag{2.7}$$

(ξ — постоянная вязкого трения). При выполнении (2.7) начинается нагрев материала за счет пристенного трения на поверхности $r = r_0$:

$$\theta(r, t_0) = 0, \qquad \theta_{,r}(R, t) = 0, \qquad \theta(r_0, t) = \alpha_1(\psi(r_0, t) - \psi_{r_0}). \tag{2.8}$$

В соответствии с условиями (2.8) поверхность $r = R$ является теплоизолированной; $\alpha_1 = \mathrm{const}$ — постоянная производства тепла за счет трения; нагревом материала вследствие термомеханической связанности обратимого деформирования и температуры пренебрегается (коэффициент связанности полагается равным нулю). В данном случае из (2.4), (2.6), (1.3) следуют соотношения

$$\begin{gathered}\sigma_{zz} = -(p + 2\mu) - 2(\varkappa + \mu)g^2 + \xi_1\theta - \xi_2\theta^2 \equiv -\Sigma_1,\\ \sigma_{rr} = -\Sigma_1 + 4l\theta g^2, \qquad \sigma_{\varphi\varphi} = -\Sigma_1 + 4\mu g^2, \qquad \sigma_{r\varphi} = 2(\mu - l\theta)g,\\ m_{r\varphi} = g, \qquad m_{rr} = -3g^2/2, \qquad m_{\varphi\varphi} = g^2/2,\\ \xi_1 = \nu_1 + 6\mu\alpha T_0, \qquad \xi_2 = \nu_3 + 18\mu\alpha^2 + 3\alpha\nu_1 T_0, \qquad l = \nu_1 + \nu_5 + 3\alpha\mu T_0.\end{gathered}$$

Из уравнения теплопроводности (1.7), второго уравнения равновесия (2.5) и условия (2.7) получаем систему уравнений для определения относительной температуры $\theta(r,t)$, угла поворота $\psi(r,t)$ и функции $f(t)$

$$
\begin{gathered}
(1+\beta_1\theta)\dot\theta + \frac{\beta_3 f}{2r^4(\mu - l\theta)^3}\,(lf\dot\theta + (\mu - l\theta)\dot f) = \lambda(\theta_{,rr} + r^{-1}\theta_{,r}),\\
\psi_{,r} = \frac{f}{r^3(\mu - l\theta)}, \qquad \psi_{,t}(r_0,t) = \frac{\delta\sigma_0}{\xi} + \frac{f}{\xi r_0^2} + \omega_{r_0}.
\end{gathered}
\qquad (2.9)
$$

Уравнения (2.9) решаются численно, с использованием условий (2.8) и условия $\psi(R,t)=0$. Расчеты продолжаются до выполнения условия пластического течения (1.8). Данное условие выполняется на поверхности $r=r_0$ в форме $\sigma_{r\varphi}(r_0,t_*) = -k(\theta(r_0,t_*))$ в момент времени $t=t_*$, для которого справедливо уравнение

$$
f(t_*) = -k_0 r_0^2(1 - \theta^2(r_0,t_*)/\theta_m^2).
$$

3. Вязкопластическое течение. Начиная с момента времени $t=t_*$ от внутренней граничной поверхности к внешней движется упругопластическая граница $r=r_1(t)$, разделяющая область деформирования на две части: область обратимого (термоупругого) деформирования $r_1(t)\leqslant r\leqslant R$ (область I) и область вязкопластического течения $r_0\leqslant r\leqslant r_1(t)$ (область II).

В области термоупругого деформирования для относительной температуры $\theta^{\mathrm{I}}(r,t)$, угла поворота $\psi^{\mathrm{I}}(r,t)$ и функции $f(t)$ справедливы соотношения (2.9).

Кинематические зависимости для рассматриваемого случая имеют вид

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{r\varphi} = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \gamma_{r\varphi} = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \varepsilon^p_{r\varphi} = \frac{\partial e_{r\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial t},\\
\varepsilon^p_{rr} = \frac{\partial p_{rr}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(x_{r\varphi} + \varepsilon^p_{r\varphi}) - 2p_{r\varphi}\,\frac{\partial\psi}{\partial t},\\
\varepsilon^p_{\varphi\varphi} = \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} + 2p_{r\varphi}(x_{r\varphi} + \varepsilon^p_{r\varphi}) + 2p_{r\varphi}\,\frac{\partial\psi}{\partial t},\\
\varepsilon^p_{rr} = -\varepsilon^p_{\varphi\varphi} = \frac{\varepsilon^p_{r\varphi}(e_{rr} - e_{\varphi\varphi})}{2e_{r\varphi}}.
\end{gathered}
$$

В области вязкопластического течения напряжения, зависящие от обратимых деформаций и температуры, определяются из (1.4), (1.6):

$$
\begin{gathered}
\sigma_{zz} = -(p+2\mu) - 2(\mu - (\nu_4 + 3\varkappa\alpha T_0)\theta)m^2_{r\varphi} +\\
+ 2(\varkappa - (\nu_4 + 3\varkappa\alpha T_0)\theta)(m_{rr} + m_{\varphi\varphi}) + \xi_1\theta - \xi_2\theta^2 = -\Sigma_2,\\
\sigma_{rr} = -\Sigma_2 + 2(\mu - l\theta)m_{rr} + (3\mu + l\theta)m^2_{r\varphi},\\
\sigma_{\varphi\varphi} = -\Sigma_2 + 2(\mu - l\theta)m_{\varphi\varphi} + (3\mu + l\theta)m^2_{r\varphi}, \qquad \sigma_{r\varphi} = 2(\mu - l\theta)m_{r\varphi}.
\end{gathered}
\qquad (3.1)
$$

Из ассоциированного закона пластического течения (2.9) следуют равенства

$$
\sigma_{r\varphi} = -k + \eta\varepsilon^p_{r\varphi}, \qquad \varphi = \varepsilon^p_{r\varphi}(-k + \eta\varepsilon^p_{r\varphi})^{-1}, \qquad \varepsilon^p_{r\varphi} = \frac{1}{\eta}\Big(\frac{f}{r^2} + k_0\Big(1 - \frac{\theta^2}{\theta_m^2}\Big)\Big). \qquad (3.2)
$$

Из условий непрерывности напряжений на движущейся упругопластической границе $r = r_1(t)$ получаем уравнение для определения этой границы:

$$
r_1(t) = \sqrt{-f(t)/[k_0(1 - \theta^2(r_1,t)/\theta_m^2)]}\,. \qquad (3.3)
$$

Уравнение теплопроводности (1.7) для области вязкопластического течения принимает вид

$$(1+\beta_1\theta^{\mathrm{II}})\dot\theta^{\mathrm{II}} + \frac{\beta_3 f}{2r^4(\mu - l\theta^{\mathrm{II}})^3}\,(lf\dot\theta^{\mathrm{II}} + (\mu - l\theta^{\mathrm{II}})\dot f) =$$
$$= \lambda(\theta^{\mathrm{II}}_{,rr} + r^{-1}\theta^{\mathrm{II}}_{,r}) + \frac{1}{2\nu_2\eta}\,\frac{f}{r^2}\Big(\frac{f}{r^2} + k_0\Big(1 - \frac{(\theta^{\mathrm{II}})^2}{\theta_m^2}\Big)\Big). \qquad (3.4)$$

В соответствии с (2.1), (3.2) для угловой скорости точек среды в этой области получаем уравнение

$$\omega = \psi^{\mathrm{II}}_{,rt} = \frac{1}{r^3(\mu - l\theta^{\mathrm{I}})}\,(\dot f + fl\theta^{\mathrm{II}}_{,t}) + \frac{1}{\eta r}\Big(\frac{f}{r^2} + k_0\Big(1 - \frac{(\theta^{\mathrm{II}})^2}{\theta_m^2}\Big)\Big). \qquad (3.5)$$

Добавляя к уравнениям (2.9), (3.3)–(3.5) краевые условия

$$\begin{gathered} \theta^{\mathrm{I}}_{,r}(R,t) = 0, \qquad \theta^{\mathrm{II}}(r_0,t) = \alpha_1(\psi^{\mathrm{II}}(r_0,t) - \psi_{r_0}),\\ \psi^{\mathrm{I}}(R,t) = 0, \qquad \omega(R,t) = 0, \qquad \theta^{\mathrm{I}}(r_1,t) = \theta^{\mathrm{II}}(r_1,t), \end{gathered} \qquad (3.6)$$

получаем систему уравнений для определения относительной температуры $\theta^{\mathrm{I}}(r,t)$, $\theta^{\mathrm{II}}(r,t)$, угла поворота $\psi^{\mathrm{I}}(r,t)$, $\psi^{\mathrm{II}}(r,t)$, функции $f(t)$ и упругопластической границы $r = r_1(t)$.

Для численной реализации задачи (2.9), (3.4)–(3.6) строятся две изменяющиеся со временем сетки по переменной r:

— в области термоупругого деформирования $r = r_{1\,i+1} + h^e_{i+1}j$, $j = \overline{0, N^e - 1}$, $h^e_{i+1} = (1 - r_{1\,i+1})/N^e$;

— в области вязкопластического течения $r = r_0 + h^p_{i+1}j$, $j = \overline{1, N^p}$, $h^p_{i+1} = (r_{1\,i+1} - r_0)/N^p$. На каждом временном шаге $t = t_* + dt(i+1)$, $i = \overline{0, N}$ вследствие движения упругопластической границы сетка меняется. Значения температуры и угла поворота для вновь строящейся сетки на предыдущем временном шаге находятся с помощью интерполяции.

По найденным значениям относительной температуры $\theta^{\mathrm{I}}(r,t)$, $\theta^{\mathrm{II}}(r,t)$, угла поворота $\psi^{\mathrm{I}}(r,t)$, $\psi^{\mathrm{II}}(r,t)$, функции $f(t)$ находятся распределения угловой скорости ω, напряжения $\sigma_{r\varphi}$, компоненты термоупругих $m_{r\varphi}$ и пластических $p_{r\varphi}$ деформаций. Неизвестные компоненты обратимых деформаций m_{rr}, $m_{\varphi\varphi}$ и необратимых деформаций p_{rr}, $p_{\varphi\varphi}$ вычисляются из системы уравнений

$$\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial t} = -\varepsilon^p_{r\varphi}\,\frac{p_{\varphi\varphi} - m^2_{r\varphi}}{m_{r\varphi}} + \frac{4\varepsilon_{r\varphi}p_{r\varphi}}{2 + m^2_{r\varphi}}\Big(1 + m_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}\,m^2_{r\varphi} - 2m_{r\varphi}p_{r\varphi}\Big),$$
$$m_{rr} = p_{\varphi\varphi} - 3m^2_{r\varphi}/2 - 2m_{r\varphi}p_{r\varphi}, \qquad p_{rr} + p_{\varphi\varphi} = -2p^2_{r\varphi}, \qquad m_{rr} + m_{\varphi\varphi} = -m^2_{r\varphi}.$$

Далее из первого уравнения равновесия (2.5) и соотношений (3.1) находятся диагональные компоненты напряжений и добавочное гидростатическое давление.

4. Деформирование при постоянной и уменьшающейся скорости поворота. При постоянной скорости поворота начиная с момента времени $t = t_1$ справедлива система уравнений (2.9), (3.4)–(3.6), где $\psi(r_0,t) = at_1t - at_1^2/2$ согласно (2.2). При этом область вязкопластического течения продолжает увеличиваться.

Полагается, что с момента времени $t = t_2 > t_1$ угловая скорость внутренней поверхности уменьшается: $\omega_{r_0}(t) = at_1 - b(t - t_2)$. Область вязкопластического течения при этом сначала увеличивается, а затем, начиная с момента времени $t' > t_2$, уменьшается. С момента времени t'' появляется новая упругопластическая граница $r = r_2(t)$, движущаяся от поверхности $r = r_1(t')$ к внутренней поверхности $r = r_0$ и разделяющая уменьшающуюся область течения $r_0 \leqslant r \leqslant r_2(t)$ и область $r_2(t) \leqslant r \leqslant r_1(t')$, в которой необратимые деформации не накапливаются (тензор необратимых деформаций не меняется со временем). В области $r_1(t') \leqslant r \leqslant R$ деформирование обратимо.

В областях обратимого деформирования $r_1(t') \leqslant r \leqslant R$ и $r_2(t) \leqslant r \leqslant r_1(t')$ справедливо уравнение теплопроводности в (2.9) с дополнительным условием совпадения значений функции θ на неизменной границе $r = r_1(t')$. В области вязкопластического течения по-прежнему выполняется уравнение (3.4). Для определения температуры, угла поворота, функций $f(t)$ и $r = r_2(t)$ получаем систему уравнений, аналогичную системе (2.9), (3.3)–(3.6).

В момент времени $t = t_3$ при продолжающемся уменьшении скорости поворота внутренней жесткой поверхности проскальзывание прекращается, и далее выполняется условие прилипания. Момент времени $t = t_3$ находится из условия $f(t_3) = -\delta\sigma_0 r_0^2$. Начиная с момента времени $t = t_3$ материал охлаждается, граничные условия на поверхности $r = r_0$ принимают вид

$$\psi(r_0) = \psi(r_0, t_3), \qquad \theta(r_0, t) = \theta(r_0, t_3)(1 - \alpha_2(t - t_3)).$$

При выбранных параметрах задачи сначала, при $t = t_4 = ab^{-1}t_1 + t_2$, скорость внутренней поверхности становится равной нулю, затем, при $t = t_5$, граничная поверхность $r = r_2(t)$ достигает жесткой стенки $r = r_0$, и в материале остаются две области обратимого деформирования: $r_1(t') \leqslant r \leqslant R$ (термоупругая) и $r_0 \leqslant r \leqslant r_1(t')$ (область с накопленными необратимыми деформациями). Этот момент времени находится из решения уравнения

$$r_0^2 k_0 (1 - \theta^2(r_0, t_5)/\theta_m^2) = -f(t_5).$$

С момента времени $t = t_5$ процесс выравнивания температуры в цилиндрическом слое вследствие теплопроводности описывается первым уравнением (2.9) и продолжается после момента времени $t = t_6 = t_4 + \alpha_2^{-1}$, когда $\theta(r_0, t_6) = 0$.

На рис. 1 показано изменение положения упругопластической границы в течение всего процесса деформирования, на рис. 2, 3 — распределения относительной температуры θ и угла поворота ψ в различные моменты времени. Расчеты проводились в безразмерных переменных

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \qquad \tau = \alpha t, \qquad \tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}.$$

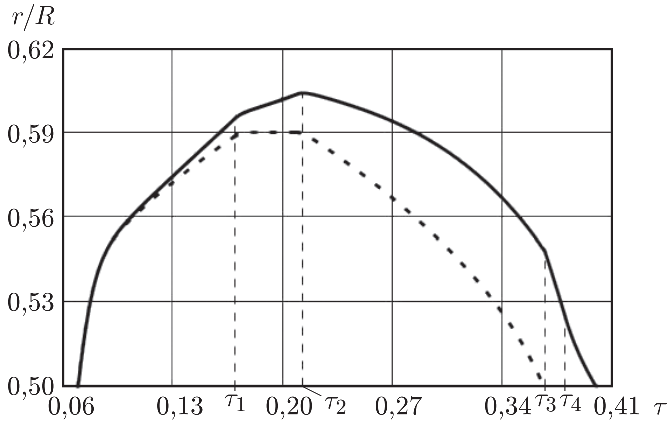

Рис. 1. Изменение области вязкопластического течения в процессе деформирования: сплошная линия — с учетом нагрева, штриховая — изотермический случай

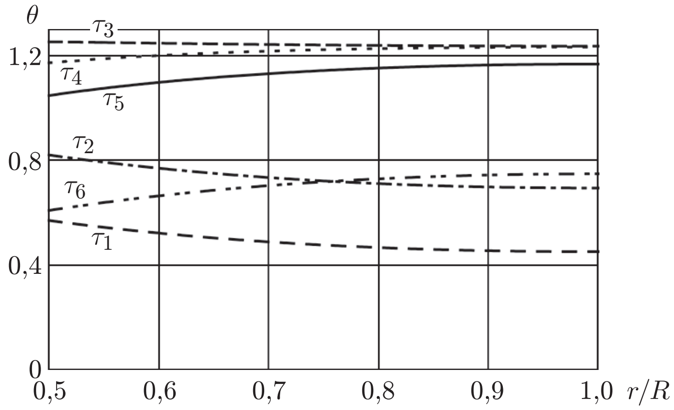

Рис. 2. Распределение температуры в различные моменты времени

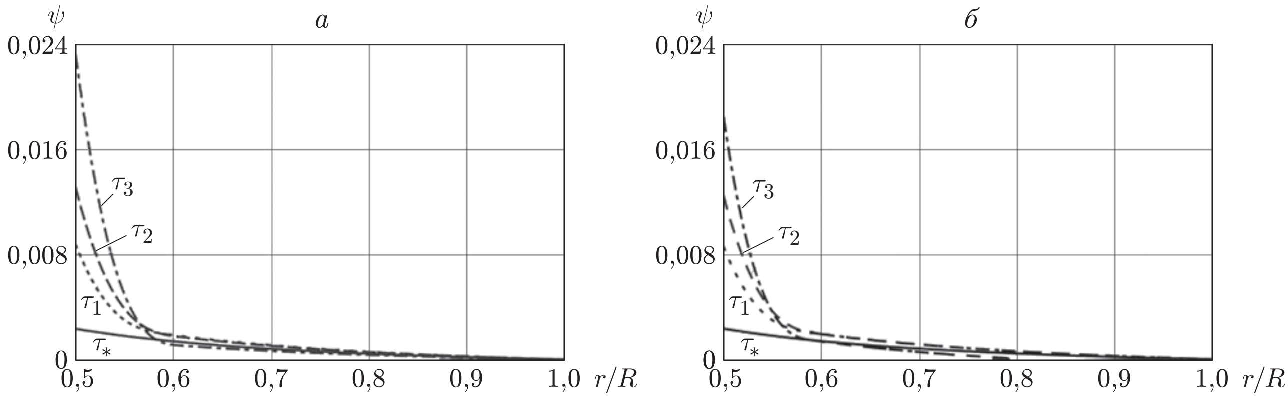

Рис. 3. Распределение значений угла поворота в различные моменты времени в случае деформирования с учетом нагрева (*а*) и в изотермическом случае (*б*)

при следующих значениях параметров: $a\eta/\mu^2 = 0{,}004$, $r_0/R = 0{,}5$, $k/\mu = 0{,}006\,21$, $a/b = 1$, $a\xi/\mu = 0{,}005$, $\beta_1 = 0{,}5$, $\beta_3 = -0{,}5$, $\delta\sigma_0/\mu = 0{,}005$, $l/\mu = 0{,}001$, $\nu_1/\mu = 0{,}02$, $\alpha_1 = 100$, $\alpha_2 = 50$, $q/R^2 = 10$.

Заключение. В работе получено решение задачи о вискозиметрическом течении упруговязкопластического материала в зазоре между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями, на одной из которых возможно проскальзывание материала и его нагрев за счет трения о стенки цилиндра. Изменение области вязкопластического течения существенно отличается от изменения области в изотермическом случае. В рассматриваемом случае при увеличивающейся скорости вращения внутреннего цилиндра область вязкопластического течения развивается быстрее; при постоянной скорости область вязкопластического течения продолжает увеличиваться, тогда как в изотермическом случае она увеличивается незначительно и далее не развивается. При уменьшающейся скорости вращения область вязкопластического течения уменьшается значительно медленнее, чем в изотермическом случае. Существенные различия в распределении перемещений наблюдаются при уменьшающейся скорости вращения: они больше, чем в изотермическом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мясников В. П.** Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязкопластической среды // ПМТФ. 1961. № 2. С. 54–60.

2. **Быковцев Г. И., Чернышов А. Д.** О вязкопластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления // ПМТФ. 1964. № 4. С. 94–96.
3. **Огибалов П. М.** Нестационарные движения вязкопластических сред / П. М. Огибалов, А. Х. Мирзаджанзаде. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1970.
4. **Георгиевский Д. В.** Жесткие зоны в статически определимых и неопределимых задачах вязкопластического течения // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. М.: Физматлит, 2006. С. 135–141.
5. **Резунов А. В., Чернышов А. Д.** Задача о чистом сдвиге вязкопластического материала между двумя цилиндрическими поверхностями // Механика деформируемого твердого тела. Куйбышев: Куйбышев. ун-т, 1975. Вып. 1. С. 32–36.
6. **Дюво Г.** Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. М.: Наука, 1980.
7. **Мосолов П. П.** Механика жесткопластических сред / П. П. Мосолов, В. П. Мясников. М.: Наука, 1981.
8. **Ивлев Д. Д.** Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред: К 100-летию со дня рожд. акад. Б. Г. Галеркина. М.: Наука, 1975. С. 236–240.
9. **Аннин Б. Д.** Упругопластическая задача / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
10. **Галин Л. А.** Упругопластические задачи. М.: Наука, 1984.
11. **Ивлев Д. Д.** Из истории дискуссий в механике. Три дискуссии // Теоретическая и прикладная механика: Междунар. науч.-техн. сб. Минск: Белорус. нац. техн. ун-т, 2012. Вып. 27. С. 5–10.
12. **Lee E. H.** Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36, N 1. P. 1–6.
13. **Кондауров В. И.** Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
14. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
15. **Аннин Б. Д., Коробейников С. Н.** Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упругопластичности // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 21–34.
16. **Чернышов А. Д.** Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120–128.
17. **Роговой А. А.** Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
18. **Быковцев Г. И., Шитиков А. В.** Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
19. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Ковтанюк Л. В.** Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
20. **Мясников В. П.** Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
21. **Буренин А. А.** Большие необратимые деформации и упругое последействие / А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк. Владивосток: Дальнаука, 2013.
22. **Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.** Винтовое вязкопластическое течение в зазоре между жесткими цилиндрами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. № 6. С. 55–70.

23. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.** Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 2. С. 143–151.
24. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Устинова А. С.** Вискозиметрическое течение несжимаемого упруговязкопластического материала при наличии смазки на граничных поверхностях // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 2. С. 43–55.
25. **Бегун А. С., Буренин А. А., Ковтанюк Л. В.** Течение упруговязкопластического материала между вращающимися цилиндрическими поверхностями в условиях нежесткого сцепления // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 2. С. 146–158.
26. **Ковтанюк Л. В.** Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 1. С. 110–120.
27. **Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В.** О теории больших упругопластических деформаций при учете температурных и реологических эффектов // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87–93.
28. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.** Неизотермическое движение упруговязкопластической среды в трубе в условиях изменяющегося перепада давления // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 3. С. 284–287.
29. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.** Развитие и торможение вязкопластического течения в слое при его нагреве за счет трения о шероховатую плоскость // ПМТФ. 2015. Т. 56, № 4. С. 101–111.
30. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.** Движение упруговязкопластической среды в круглой трубе при ее нагреве за счет пристеночного трения // Прикл. математика и механика. 2016. Т. 80, № 2. С. 265–275.
31. **Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л.** Деформирование и разогрев упруговязкопластического цилиндрического слоя при его движении за счет изменяющегося перепада давления // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 6–18.
32. **Знаменский В. А., Ивлев Д. Д.** Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114–118.

Поступила в редакцию 24/VI 2021 г.,
после доработки — 24/VI 2021 г.
Принята к публикации 28/VI 2021 г.