Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 14–21

А. С. Бегун, Л. В. Ковтанюк, А. О. Лемза

НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН

Дальневосточный федеральный университет

Аннотация. Рассматривается деформирование материала, расположенного между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами, при повороте внутреннего цилиндра. Материал полагается несжимаемым и проявляющим нелинейные упругие и вязкие свойства. Для математического моделирования используется теория больших деформаций, основанная на дифференциальных определениях для обратимых и необратимых деформаций. Рассчитаны поля перемещений, напряжений, обратимых, необратимых и полных деформаций.

Ключевые слова: большие деформации, упругость, ползучесть, остаточные напряжения, необратимые деформации.

УДК: 539.374

Модель упругопластического тела предполагает независимость механических свойств материалов от времени. Однако у многих современных технологических материалов наблюдается заметное изменение их механических свойств от времени. Явление ползучести выражается либо в возрастании деформаций с течением времени при неизменной нагрузке, либо в падении напряжений при постоянной деформации. Свойство ползучести обнаруживают материалы различной природы. Физические механизмы ползучести у разных материалов различны. Например, бетон и полимеры ползут при нормальной температуре и обладают свойством ограниченной ползучести. Ползучесть металлов не ограничена и требует более высокой температуры. Накопление деформаций в теле, образующихся в результате ползучести, может приводить к искажению или даже разрушению этого тела. Таким образом, изучение процесса ползучести и связанных с ним явлений актуально и представляет значительный интерес для современных теоретических и прикладных наук.

1. Основные модельные соотношения. Для описания движения среды будем использовать модель больших деформаций [2], [3], [5]. В прямоугольной декартовой системе координат

Поступила 10.08.2014

Эйлера x_i кинематика среды задается соотношениями

$$
\begin{gathered}
d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{km} e_{mj}, \\
\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik}) e_{kj} + e_{ik} (\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj}) \right), \\
\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik} p_{kj}, \qquad \frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik} n_{kj} + n_{ik} r_{kj}, \\
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \qquad v_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j} v_j, \qquad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\
r_{ij} = w_{ij} + z_{ij} \left(e_{ks}, \varepsilon_{ks} \right), \qquad w_{ij} = \frac{1}{2} \left(v_{i,j} - v_{j,i} \right), \\
z_{ij} = A^{-1} \left[\left(\varepsilon_{ik} e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj} \right) B^2 + B \left(\varepsilon_{ik} e_{ks} e_{sj} - e_{ik} e_{ks} \varepsilon_{sj} \right) + e_{ik} \varepsilon_{ks} e_{st} e_{tj} - e_{ik} e_{ks} \varepsilon_{st} e_{tj} \right], \\
A = 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3} E_1^3 + \frac{1}{3} E_3, \quad B = 2 - E_1, \\
E_1 = e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij} e_{jk} e_{ki}.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

В формулах (1) d_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij}и p_{ij} — их обратимая и необратимая составляющие; u_i, v_i — компоненты векторов перемещений и скоростей точек среды; $\frac{D}{Dt}$ — оператор используемой объективной производной тензоров по времени, которая приведена для произвольного тензора n_{ij}; r_{ij} — компоненты тензора вращений. Считаем, что необратимые деформации p_{ij} могут быть и деформациями ползучести, и пластическими деформациями. Источник γ_{ij} в уравнении переноса для необратимых деформаций — скорость их накопления.

Далее полагаем, что необратимые деформации накапливаются в материале непосредственно с начала процесса деформирования и определяются реологическими свойствами материала.

Напряжения полностью определяются обратимыми деформациями и связаны с ними формулой, аналогичной формуле Мурнагана для несжимаемой среды в нелинейной теории упругости:

$$
\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}). \tag{2}
$$

В зависимости (2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши, p — добавочное гидростатическое давление, $W\left(e_{ij}\right)$ — упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии). Зададим данную функцию в виде

$$
\begin{gathered}
W = -2\mu I_1 - \mu I_2 + bI_1^2 + (b - \mu) I_1 I_2 - \chi I_1^3 + ..., \\
I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2} e_{sk} e_{ks}, \qquad I_2 = e_{st} e_{ts} - e_{sk} e_{kt} e_{ts} + \frac{1}{4} e_{sk} e_{kt} e_{tn} e_{ns}.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Формула $W(I_1, I_2)$ задает консервативный механизм деформирования, μ — модуль сдвига, b, χ — постоянные материала.

Считаем, что диссипативный механизм деформирования связан с вязкими и пластическими свойствами материалов. В областях, где напряженное состояние еще не достигло поверхности текучести (где пластические деформации отсутствуют), и в областях разгрузки (где есть накопленные пластические деформации)

$$
\varepsilon_{ij}^p = 0, \qquad \gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v.
$$

Здесь ε_{ij}^p — скорость пластических деформаций, ε_{ij}^v — скорость деформаций ползучести. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим, введя потенциал